

Langsam wandernde Domänen
hoher Feldstärke
in homogenen Halbleitern

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Karl-Eugen Kröll

aus Bad Hersfeld

Marburg 1967

Langsam wandernde Domänen
hoher Feldstärke
in homogenen Halbleitern

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Karl-Eugen Kröll

aus Bad Hersfeld

Marburg 1967



Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am: 9.6.1967

Tag der mündlichen Prüfung am: 28.6.1967

Berichterstatter: Prof. Dr. O. Madelung

Mitberichterstatter: Prof. Dr. J. Stuke

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	3
Einleitung	4
I. Allgemeine Grundlagen	10
1) Die Grundgleichungen	10
2) Modelle, die zu einer negativen differentiellen Leitfähigkeit führen	11
3) Die Differentialgleichungen für wandernde Domänen	18
4) Randbedingungen und Lösungskurven in der E_p -Ebene	23
II. Kleine Störungen einer homogenen Feldverteilung bei negativem differentiellen Widerstand	25
1) Linearisierung des Gleichungssystems	25
2) Die Dispersionsgleichung	26
3) Wellen mit konstanter Amplitude	28
4) Gedämpfte und sich verstärkende Wellen	32
III. Singuläre Punkte und Säkulargleichung	34
1) Linearisierung des Gleichungssystems (1.23) in der Nähe singulärer Punkte	34
2) Einteilung der singulären Punkte für $n = 2$	35
3) Die Säkulargleichung	39
IV. Lösungskurven in der E_p -Ebene	41
1) Eigenschaften der drei singulären Punkte in der E_p -Ebene	41
2) Lösungskurven in der E_p -Ebene bei falsch ge- wählter Domänengeschwindigkeit	43
3) Die Abhängigkeit der Domänenform vom Gesamtstrom j_0	47

V. Bestimmung der Domänengeschwindigkeit und der Abklinglängen der Domänenausläufer	51
1) Linearisierung des Gleichungssystems (1.22) in der Nähe der drei singulären Punkte	51
2) Domänengeschwindigkeit	53
3) Domänenausläufer	56
VI. Die nichtlineare Theorie	61
1) Bestimmung der Domänengeschwindigkeit aus den nichtlinearen Differentialgleichungen (1.22) ...	61
2) Symmetrische Domänen	64
VII. Verfahren zur praktischen Berechnung der Domänenformen	66
1) Aufbau des Programms	66
2) Ergebnisse	70
VIII. Zusammenfassung	84
Literatur	92

Bezeichnungen

A:	Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (5.3)
D:	Diffusionskoeffizienten der Elektronen
e:	Elementare Ladungseinheit
E:	Elektrische Feldstärke
E_i :	Elektrische Feldstärke bei den singulären Punkten ($i = 1, 2, 3$)
h:	Löcherdichte in den Haftstellen
$h_n(E)$:	Löcherdichte bei homogener Feldverteilung, wenn Rekombinationsgleichgewicht herrscht
j_0 :	Gesamtstromdichte
$j_n(E)$:	Stromdichte bei homogener Feldverteilung, wenn Rekombinationsgleichgewicht herrscht
k:	Wellenzahl, manchmal auch Boltzmann-Konstante
n:	Elektronenkonzentration im Leitungsband
$n_n(E)$:	Elektronenkonzentration bei homogener Feldverteilung, wenn Rekombinationsgleichgewicht herrscht
T:	Absolute Temperatur
v_D :	Domänengeschwindigkeit
x:	Ortskoordinate
z:	$= x + v_D t$
α_i :	Eigenwerte der Matrix A
β :	Realteil eines komplexen Eigenwertes
γ :	Imaginärteil eines komplexen Eigenwertes
ϵ :	Dielektrische Konstante
ϵ_0 :	Dielektrische Konstante des Vakuums ($= 8,85 \cdot 10^{-14} \text{ As/Vcm}$)
μ :	Beweglichkeit der Elektronen
ρ :	Raumladungsdichte
τ_h :	Lebensdauer der Löcher in den Haftstellen
τ_n :	Lebensdauer der Elektronen
τ_R :	Dielektrische Relaxationszeit
$\frac{1}{\tau}$:	$= \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_h}$
ω :	Kreisfrequenz

Einleitung

Bei genügend hohen Feldstärken zeigen die Stromspannungskennlinien von homogenen Halbleitern und Photoleitern Abweichungen vom Ohmschen Gesetz. Diese können so stark sein, daß sich eine negative differentielle Leitfähigkeit ergibt (Bild 1).

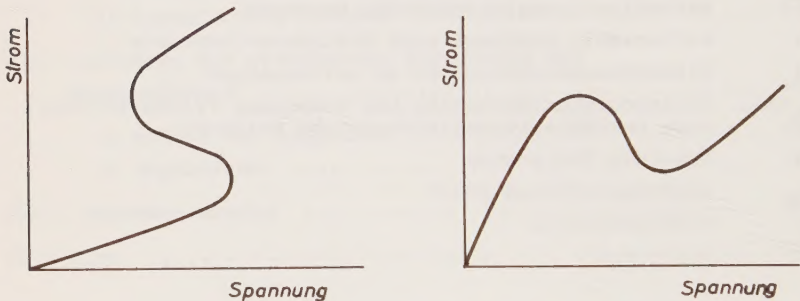


Bild 1: S- und N-förmige Stromspannungskennlinie

Wenn, wie im folgenden angenommen werden soll, die negative differentielle Leitfähigkeit auf einem Volumeneffekt beruht, kann man den fallenden Ast der Stromspannungskennlinie nicht ausmessen, weil Inhomogenitäten im Innern des Halbleiters auftreten. Beim stromkontrollierten (S-förmigen) Kennlinientyp bleibt die Stromdichte nicht mehr über dem ganzen Querschnitt des Kristalls gleich, sondern es bilden sich zwischen den Kontakten Stromfäden aus, die mit wachsendem Strom breiter werden. Beim spannungskontrollierten (N-förmigen) nega-

tiven differentiellen Widerstand, für den wir uns im folgenden allein interessieren wollen, entsteht dagegen an einem Kontakt oder an einer Inhomogenität ein Gebiet hoher Feldstärke. Dieses dehnt sich mit zunehmender Spannung so aus, daß der Strom dabei nahezu konstant, d.h. gesättigt bleibt.

Ridley (1) und Stöckmann (2) haben dieses Verhalten unabhängig voneinander aus dem thermodynamischen Prinzip der minimalen Entropie-Erzeugung hergeleitet. Der Grundgedanke war dabei folgender:

Wenn die Entropie-Erzeugung hauptsächlich von der Jouleschen Wärme herrührt, wächst die in der Zeiteinheit entstehende Entropie mit dem Strom. Der Zustand mit geringster Entropie-Erzeugung ist dann also derjenige, bei dem der Strom bei festgehaltener Spannung am kleinsten ist. Wir wollen zunächst annehmen, daß im Halbleiter eine homogene Feldverteilung trotz negativer differentieller Leitfähigkeit vorliegt. Man kann dann aus der gegebenen Spannung und dem Kontaktabstand die Feldstärke berechnen und die zugehörige Stromdichte eindeutig aus der Kennlinie im Bild 2 entnehmen. Betrachten wir nun inhomogene Feldverteilungen wie im Bild 2b, dann ist der Strom trotz vorgegebener Spannung nicht mehr allein durch die Kennlinie gegeben. Man kann daher in Bild 2a die Stromdichte-Gerade j_0 absenken. Dadurch ändern sich zwar die Feldstärken E_1 und E_3 der beiden Gebiete verschiedener Feldstärke, aber die Spannung bleibt trotzdem erhalten, wenn man die Breite der Gebiete entsprechend mitverändert. Die kleinstmögliche Stromdichte ist $j_{\min}$. Dazu gehört die im Bild 2b gestrichelt gezeichnete inhomogene Feldverteilung. Dieser Zustand ist vom thermodynamischen Standpunkt aus am günstigsten, weil wegen des geringen Stromes am wenigsten Entropie erzeugt wird. Der zugehörige Strom ist ein Sättigungsstrom, weil er sich unabhängig von der angelegten Spannung einstellt.

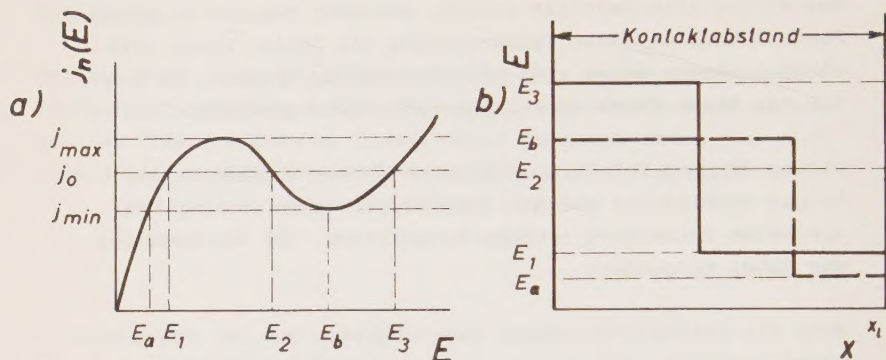


Bild 2: a) Stromdichte als Funktion der Feldstärke. ($j_n(E)$ ist die Stromdichte, die sich bei homogener Feldverteilung einstellen würde).

b) Inhomogene Feldverteilungen, die zu den Stromdichten j_0 und j_{min} gehören ($x_1 = \text{Kontaktabstand}$).

Experimentell stellten Kiess (55) und Polke (47) mit Hilfe von Potentialsonden die erwähnten Gebiete verschieden hoher Feldstärke an bestrahlten CdS-Kristallen bzw. polykristallinen Schichten aus hexagonalem Selen fest. Böer und Mitarbeiter ((3) bis (5)) konnten sogar an photoleitenden CdS-Kristallen die Gebiete hoher und niederer Feldstärke direkt sichtbar machen. Sie strahlten dazu Licht mit der Frequenz der Absorptionskante ein und nutzten aus, daß die Intensität des durchgelassenen Lichtes sehr empfindlich von geringfügigen Verschiebungen der Absorptionskante durch das elektrische Feld abhängt (Franz-Keldysh-Effekt). Sie beobachteten ein Gebiet hoher Feldstärke (Domäne), das sich von der Kathode aus mit einer Geschwindigkeit von etwa $10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ durch den Kristall zur Anode bewegte. Dort verschwand die Domäne, doch gleichzeitig bildete sich an der Kathode eine neue aus,

welche sich wieder ablöste usw.. Damit gekoppelt traten trotz festgehaltener Spannung Strominstabilitäten auf, denn jedesmal, wenn die Domäne sich abtrennte, sank der Strom auf einen tieferen Wert ab, um wieder anzusteigen, sobald die Domäne an der Anode angekommen war.

Niederfrequente Strominstabilitäten, die auf wandernde Domänen bei negativer differentieller Leitfähigkeit zurückzuführen sind, wurden nicht nur am CdS gemessen. Als Beispiel erwähnt seien noch die Untersuchungen von Ridley und Pratt (6) sowie von Kalashnikov und Mitarbeitern ((7), (8)) an Au- und Cu-dotierten Germaniumkristallen sowie die Messungen von Fishler-Hazoni und Williams (9) am Mn-dotierten ZnS. Außerdem sind vermutlich die niederfrequenten Strominstabilitäten, die von Polke und Hasler ((10), (11)) am hexagonalen Selen beobachtet wurden, ebenfalls durch wandernde Gebiete hoher Feldstärke zu erklären.

Bei den eben aufgezählten Messungen lag die Frequenz der Strominstabilitäten in der Größenordnung von wenigen Hz. Ganz erheblich höhere Frequenzen, nämlich mehrere GHz, wurden von Gunn (12) beim GaAs und InP gefunden (Gunn-Effekt). Er konnte mit Hilfe einer kapazitiven Sonde nachweisen, daß auch dort die Instabilitäten mit wandernden Domänen zusammenhängen, die sich allerdings viel schneller, nämlich mit Elektronendriftgeschwindigkeit, bewegen. Später wurde der Gunn Effekt noch beim CdTe und GaAs-GaP gefunden ((13), (14)).

Wandernde Gebiete hoher Feldstärke sind also bei Strominstabilitäten, die auf einer negativen differentiellen Leitfähigkeit beruhen, eine recht allgemeine Erscheinung. Die Ausbildung der Gebiete hoher Feldstärke ist schon aus dem thermodynamischen Prinzip der minimalen Entropie-Erzeugung zu verstehen. Dagegen kann man daraus nicht erklären, warum sich die Domänen überhaupt bewegen und warum in den verschiedenen Fällen so unterschiedliche Domänengeschwindigkeiten

auftreten. Dazu muß man im einzelnen das Verhalten der Ladungsträger untersuchen. Allgemein läßt sich aber folgendes sagen:

Wenn die Raumladung der Domänenflanken von den Elektronen des Leitungsbandes getragen wird, erwartet man, daß sich die Domänen mit Elektronendriftgeschwindigkeit bewegen. Langsamere Domänengeschwindigkeiten kommen dagegen dadurch zustande, daß die Elektronen während ihres Wanderns immer wieder an Haftstellen festgehalten werden. Ein Teil der Raumladung der Domänenflanken befindet sich dann in den Haftstellen, und zwar ist dieser Anteil desto größer, je kleiner die Domänengeschwindigkeit im Verhältnis zur Elektronendriftgeschwindigkeit ist.

Für eine genauere mathematische Untersuchung der Domäneneigenschaften muß man den Mechanismus kennen, der für die negative differentielle Leitfähigkeit verantwortlich ist. Da die Leitfähigkeit proportional zum Produkt aus Beweglichkeit und Ladungsträgerdichte ist, kann jeder der beiden Faktoren die N-förmige Kennlinie verursachen. Dazu seien folgende Beispiele angeführt:

- A) Die Beweglichkeit kann mit wachsendem Feld abnehmen
 - a) bei "heißen Elektronen" ((15), (16)),
 - b) durch Übergang der Ladungsträger auf Energiebänder mit kleinerer Beweglichkeit (Gunn Effekt, (12), (21) bis (25)).
- B) Die Dichte der beweglichen Ladungsträger nimmt ab
 - a) durch Einfang an Zentren mit feldabhängigem Wirkungsquerschnitt ((6), (17) bis (19)),
 - b) durch Rekombination mit Minoritätsträgern, die durch innere Feldemission befreit wurden ((2), (20)).

Die Mechanismen Aa) und Ab) führen zu Domänengeschwindigkeiten, die in der Größenordnung der Elektronendriftgeschwindigkeit liegen. In den Fällen Ba) und Bb) findet ein Austausch von Ladungsträgern zwischen Leitungsband und verbotener Zone statt, und man erhält dann aus der Theorie Domänengeschwindigkeiten, die klein sind gegen die Elektronendriftgeschwindigkeit. Dennoch hatte man bisher Schwierigkeiten, die extrem langsamen Domänen beim CdS, hexagonalen Selen und beim Au- und Cu-dotierten Germanium zu verstehen. Die ersten theoretischen Versuche in dieser Richtung stammen von Ridley und Döhler ((26), (27)). Beide untersuchten Raumladungswellen kleiner Amplitude in einem Medium mit negativer differentieller Leitfähigkeit und berechneten die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit. Spätere Arbeiten von Bonch-Bruevich ((28) bis (30)), Volkov ((31), (32)), Wilhelm (33), Böer und Dussel (34) befaßten sich mit Domänen, die sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit ohne Gestaltsänderung durch den Kristall bewegen. Dabei wurden entweder bestimmte Domäneneigenschaften aus dem Experiment ohne theoretische Begründung übernommen ((28) bis (30)), oder der Verschiebungsstrom wurde vernachlässigt ((31), (32)). Wilhelm setzte sogar unendlich schmale Raumladungszonen an den Domänenflanken voraus.

Die vorliegende Arbeit kommt weitgehend ohne solche Annahmen aus. Es werden zunächst Raumladungswellen kleiner Amplitude untersucht. Dann werden die Lösungen des Differentialgleichungssystems in der Nähe singulärer Punkte betrachtet und eine genäherte Formel für die Domänengeschwindigkeit abgeleitet, welche große Ähnlichkeit mit den von Ridley und Bonch-Bruevich angegebenen Ausdrücken hat. Für symmetrische Domänen werden Form und Geschwindigkeit durch Integration der nichtlinearen Differentialgleichungen berechnet. Zum Schluß wird ein Verfahren zur numerischen Integration der Differentialgleichungen angegeben und zur Überprüfung der gewonnenen Ergebnisse angewendet.

I Allgemeine Grundlagen

1) Die Grundgleichungen

Die mathematische Beschreibung der Leitungsvorgänge geht von der Poissonschen Gleichung und den Kontinuitätsgleichungen für die einzelnen Arten von Ladungsträgern aus. Es soll im folgenden stets ein unendlich ausgedehnter, "eindimensionaler" n-Leiter vorausgesetzt werden, so daß man nur eine Ortskoordinate x betrachten muß. Anstelle der Kontinuitätsgleichung für die Elektronen des Leitungsbandes führen wir die Kontinuitätsgleichung für die gesamte Raumladung ein. Bezeichnet man mit E , ρ und j_1 die elektrische Feldstärke, die Raumladungsdichte und die Leitungsstromdichte, so gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \quad , \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0 \quad . \quad (1.2)$$

Wenn Strom und Raumladung nur von den Elektronen des Leitungsbandes herrühren, erhält man mit den entsprechenden Ausdrücken für ρ und j_1 ein vollständiges Gleichungssystem. Wenn aber Elektronen an Haftstellen der verbotenen Zone eingefangen werden können, braucht man noch mindestens eine weitere Gleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = G_h - R_h \quad . \quad (1.3)$$

Dabei ist h die Dichte der unbesetzten Haftstellen und G_h und R_h sind die Erzeugungs- und Rekombinationsraten für diese Haftstellen. Im nächsten Abschnitt soll an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, daß man die Gleichung (1.3) auf die Form

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{h-h_n(E)}{\tau_h} - \frac{n-n_n(E)}{\tau_n} \quad (1.4)$$

bringen kann, wobei $h_n(E)$ und $n_n(E)$ diejenigen Konzentrationen der unbesetzten Haftstellen und Elektronen sind, die im Gleichgewicht ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$) und bei fehlender Raumladung ($\rho = 0$, $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$) bei der Feldstärke E vorliegen würden. Die Lebensdauern τ_h und τ_n hängen im allgemeinen von $E, h-h_n(E)$ und $n-n_n(E)$ ab, doch wir wollen bei späteren Rechnungen voraussetzen, daß eine Abhängigkeit von $h-h_n$ und $n-n_n$ nicht vorliegt.

2) Modelle, die zu einer negativen differentiellen Leitfähigkeit führen

Der für das Auftreten wandernder Domänen notwendige negative differentielle Widerstand möge dadurch zustande kommen, daß die Elektronen mit wachsender Feldstärke in einen Zustand überwechseln können, in dem sie nicht mehr beweglich sind. Einige Beispiele sollen hier kurz erläutert werden:

- a) Einfang von Elektronen an Zentren mit feldabhängigem Wirkungsquerschnitt

Ein solches Modell ist in Fig. 3 skizziert.

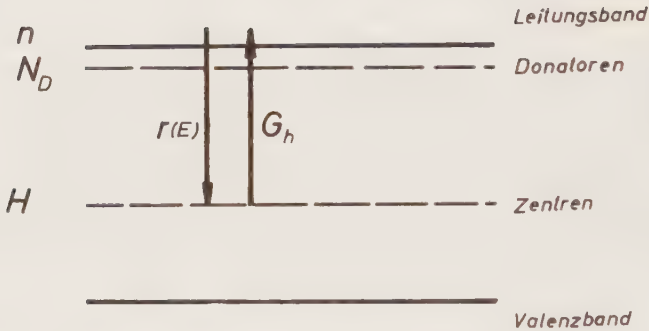


Bild 3: Modell für den Einfang von Elektronen an Zentren mit feldabhängigem Wirkungsquerschnitt

Dabei bedeuten N_D und H die Donatoren- und Zentren-dichten. Den Einfang der Elektronen beschreiben wir durch eine Rekombinationsrate $r(E)$, den Gegenprozeß durch eine Erzeugungsrate G_h , die proportional zur Dichte der besetzten Zentren ist. Wenn man mit h die Dichte der unbesetzten Zentren bezeichnet, so schreibt sich die Erzeugungsrate

$$G_h = g(H-h) , \quad (1.5)$$

während die Rekombinationsrate nach dem Massenwirkungsgesetz gegeben ist:

$$R_h = r(E)nh , \quad (1.6)$$

Es gilt also

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - r(E)nh + g(H-h) . \quad (1.7)$$

Wenn die Zentren im unbesetzten Zustand elektrisch neutral sind, erhält man die Raumladungsdichte

$$\rho = e(N_D - H - n + h) \quad (1.8)$$

oder mit der Bezeichnung $N = N_D - H$:

$$\rho = e(N - n + h) \quad , \quad N = N_D - H \quad (1.9)$$

Wir führen nun die Dichten $n_n(E)$ und $h_n(E)$ ein, die sich im stationären Gleichgewicht und bei fehlender Raumladung einstellen würden. Sie ergeben sich also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -r(E)n_n(E)h_n(E) + g(H - h_n(E)) \quad , \\ 0 &= N - n_n(E) + h_n(E) \quad . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Die Differentialgleichung (1.7) schreibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= -r(E)h(n - n_n) - (r(E)n_n + g)(h - h_n) \quad , \\ \text{oder} \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{n - n_n}{\tau_n} - \frac{h - h_n}{\tau_h} \quad , \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei die Lebensdauern τ_n und τ_h eingeführt wurden:

$$\tau_n = \frac{1}{r(E)h} \quad , \quad \tau_h = \frac{1}{r(E)n_n(E) + g} \quad (1.12)$$

Im allgemeinen hängen τ_n und τ_h von der Feldstärke ab und τ_h enthält außerdem noch die Konzentration h , die nur für kleine Abweichungen vom Gleichgewichtswert $h_n(E)$ angenähert eine Funktion der Feldstärke ist. Die Differentialgleichung (1.11) hat die gleiche Gestalt, die ohne Beweis

für (1.4) angegeben worden war.

Ein Einfangmechanismus der hier beschriebenen Art liegt im Au- bzw. Cu-dotierten Germanium vor ((6), (17) bis (19)), möglicherweise auch beim Co-dotierten Silizium (44).

b) Innere Feldemission von Minoritätsträgern

Modelle, die auf Grund der inneren Feldemission von Minoritätsträgern auf einen negativen differentiellen Widerstand führen, sind von Böer und Wilhelm (45), Kiess und Stöckmann (2), sowie von Döhler (27) vorgeschlagen worden. Der Grundgedanke ist folgender (Bild 4):

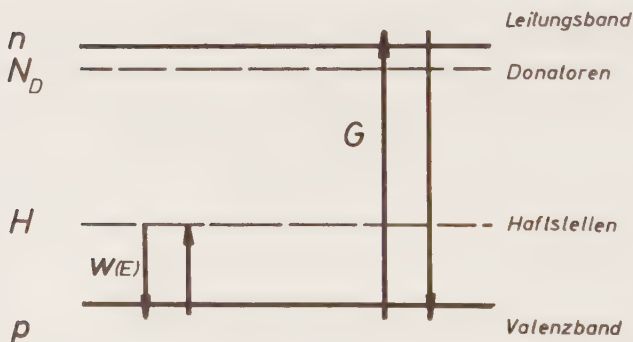


Bild 4: Darstellung der Übergänge im Energiebandschema bei der inneren Feldemission von Minoritätsträgern (Erläuterung der Bezeichnungen im Text).

Wir bezeichnen die von Haftstellen eingefangenen Löcher mit h , die im Valenzband befindlichen mit p . Bei niedriger Feldstärke befinden sich die Löcher weitgehend in den Haftstellen ($h \gg p$). Sobald aber die Feldstärke genü-

gend groß ist, können Löcher aus den Haftstellen zum Beispiel durch Tunneleffekt ins Valenzband übergehen. Diese überschüssigen freien Löcher rekombinieren mit den Elektronen des Leitungsbandes und bewirken so eine Abnahme der Elektronendichte im Leitungsband.

Bei der mathematischen Beschreibung erhält man zwei Differentialgleichungen, von denen die eine die zeitliche Änderung der Löcherkonzentration in den Haftstellen, die zweite die Konzentrationsänderung der Löcher im Valenzband beschreibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= -w(E)h + r_h p(H-h) \quad , \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= w(E)h - r_h p(H-h) - r_{pn} + G \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

Dabei sind $w(E)$ eine feldabhängige Emissionswahrscheinlichkeit und r_h der Rekombinationskoeffizient für den Einfang von Löchern an Haftstellen. Ferner ist die Band-Band Rekombination der Einfachheit halber als bimolekular angesetzt worden (Rekombinationskoeffizient r). Wenn sich das Ladungsträgergleichgewicht zwischen Valenzband und Haftstellen sehr viel schneller einstellt als zwischen Valenzband und Leitungsband, kann man in guter Näherung

$$w(E)h = r_h p(H-h)\tag{1.14}$$

setzen. Zur weiteren Vereinfachung sei angenommen, daß die Haftstellen nur zu einem geringen Teil mit Löchern besetzt seien ($H \gg h$). Dann kann man anstelle von $r_h(H-h)$ die reziproke Löcher-Einfangzeit $r_h H = \frac{1}{\tau_h}$ einführen, so daß (1.14) jetzt die einfache Gestalt

$$p = h \cdot w(E) \cdot \tau_h\tag{1.15}$$

erhält. Die rechten Seiten der Gleichungen (1.13) legen es nahe, beide Differentialgleichungen zu addieren und die Gesamt-Löcherdichte $p_g = (h+p)$ einzuführen:

$$\frac{\partial(h+p)}{\partial t} = -rpn + G ,$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -r \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega(E)\tau_h}} \right\} p_g n + G . \quad (1.16)$$

Mit Hilfe der Dichten $p_{gn}(E)$ und $n_n(E)$, die sich im Gleichgewicht ($\frac{\partial p_g}{\partial t} = 0$) bei fehlender Raumladung einstellen würden, kann man diese Differentialgleichung auf die zu (1.4) und (1.11) analoge Form bringen:

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = - \frac{p_g - p_{gn}(E)}{\tau_{pg}} - \frac{n - n_n(E)}{\tau_n} ,$$

$$\tau_{pg} = \frac{1}{r_g(E)n_n(E)} , \quad \tau_n = \frac{1}{r_g(E)p_g} , \quad \tau_g(E) = r \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega(E)\tau_h}} . \quad (1.17)$$

Die der Gleichung (1.8) entsprechende Formel für die Raumladung lautet

$$\rho = e(p+h-n+N_D) = e(N_D - n + p_g) , \quad (1.18)$$

sofern die nicht mit Löchern besetzten Haftstellen neutral sind.

Innere Feldemission von Minoritätsträgern wurde bisher als Ursache für die niederfrequenten Strominstabilitäten bei CdS und hexagonalen Selen angenommen ((45), (10)). Bei den vorgenommenen Vernachlässigungen führen die Modelle für Elektroneneinfang an Zentren und für innere Feldemission aus Minoritätsträgerhaftstellen zu Gleichun-

gen, die in ihrer Struktur sehr ähnlich sind, so daß man sich bei späteren Rechnungen auf das erstere Modell beschränken kann.

- c) Feldabhängige Verteilung der Elektronen auf Bänder mit verschiedenen effektiven Massen.

Dieser Mechanismus liegt beim GaAs, InP und CdTe vor und beruht auf der besonderen Art der Energiebandstruktur bei vielen III-V-Verbindungen. Der in diesem Zusammenhang interessante Teil der Bandstruktur ist in Bild 5 skizziert

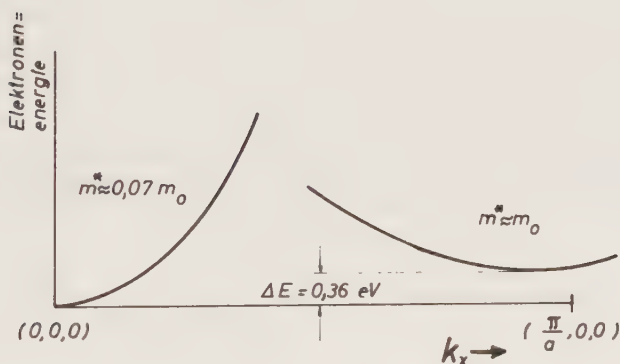


Bild 5: Haupt- und Nebental der Bandstruktur beim GaAs

Bei niedrigen Feldstärken befinden sich die Leitungselektronen im $(0,0,0)$ -Energietal. Dort haben sie beim GaAs eine effektive Masse von $0,07 m_0$, wobei m_0 die Masse freier Elektronen ist. Bei elektrischen Feldstärken von der Größenordnung $10^3 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ können sie aber in die

flacheren, energetisch etwas höher liegenden Nebentäler überwechseln. In diesen haben die Elektronen etwa die effektive Masse m_0 und eine erheblich kleinere Beweglichkeit als im (0,0,0)-Tal. Das Gleichgewicht zwischen den Elektronen in beiden Bändern stellt sich in der kurzen Zeit von 10^{-12} s ein, einer Zeit, die klein ist im Verhältnis zu den Zeitkonstanten, die sonst noch eine Rolle spielen könnten. Man darf daher das Verhältnis der Elektronendichten in beiden Tälern als nur von der elektrischen Feldstärke abhängig betrachten. Bei der Beschreibung der Leitungsvorgänge braucht man dann die Elektronen in den verschiedenen Bändern nicht mehr zu unterscheiden, wenn man eine mittlere feldabhängige Beweglichkeit und Diffusionskonstante einführt ((42), (43)).

Der hier beschriebene Mechanismus führt zu Stromspannungskennlinien, die stark abhängen von der Energiedifferenz ΔE , um die die Nebentäler höher liegen als das Haupttal (23). Die auftretenden Strominstabilitäten (Gunn Effekt) sollen in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden. Über wandernde Domänen beim Gunn Effekt sind in letzter Zeit viele Arbeiten veröffentlicht worden (z.B. (36) bis (43)).

3) Die Differentialgleichungen für wandernde Domänen

Wir bringen zunächst die Kontinuitätsgleichung (1.2) auf eine bequemere Form, indem wir die Raumladung durch $\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x}$ ersetzen und über x integrieren. Dadurch erhält man die bekannte Formel, daß sich der Gesamtstrom aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt:

$$j_0 = j_1 + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} . \quad (1.18)$$

Die Gesamtstromdichte j_0 hat bezüglich x die Bedeutung einer Integrationskonstanten, bezüglich der Zeit braucht j_0 aber nicht konstant zu sein. Wir untersuchen im folgenden wandernde Domänen in einem Halbleiter mit sonst homogener, stationärer Feldverteilung. In diesem Falle wird der Gesamtstrom auch noch zeitunabhängig ($x = \pm \infty$, $j_0 = \text{const.}$).

Es sei vorausgesetzt, daß der Leitungsstrom nur von den Elektronen des Leitungsbandes getragen wird. Er besteht aus einem Feld- und einem Diffusionsanteil:

$$j_1 = e\mu nE + eD \frac{\partial n}{\partial x} . \quad (1.19)$$

Bei homogener und stationärer Feldverteilung ($\frac{\partial E}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$) erhält man einen reinen Feldstrom

$$j_n(E) = e\mu n_n(E)E , \quad (1.20)$$

der im Sinne einer N-förmigen Kennlinie (Bild 2) von der elektrischen Feldstärke abhängen möge. Die Elektronendichte bei homogener stationärer Feldverteilung muß dann wegen

$$n_n(E) = \frac{j_n(E)}{e\mu E}$$

etwa die im Bild 6 skizzierte Feldabhängigkeit zeigen

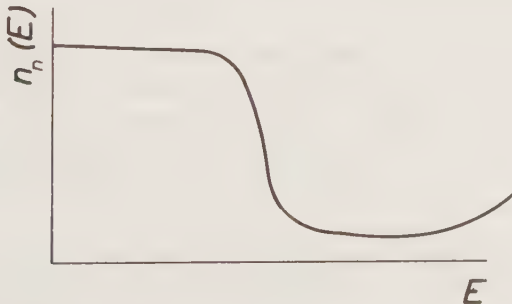


Bild 6: Feldabhängigkeit der Elektronendichte bei homogener, stationärer Feldverteilung

Die aus (1.1), (1.4), (1.9), (1.18) und (1.19) folgenden nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \quad , \quad \rho = e(N - n + h) \quad ,$$

$$eD \frac{\partial n}{\partial x} = j_0 - e\mu n E - \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad , \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{n - n_n(E)}{\tau_n(E)} - \frac{h - h_n(E)}{\tau_h(E)} \quad ,$$

sind in allgemeiner Form nicht lösbar, was an folgenden unangenehmen Eigenschaften des Gleichungssystems liegt:

- 1.) Der Leitungsstrom enthält das nichtlineare Produkt nE . In ungünstigen Fällen können sogar noch die Beweglichkeit μ und der Diffusionskoeffizient D vom elektrischen Feld abhängen. In dieser Arbeit sollen μ und D aber als konstant betrachtet werden.
- 2.) In der letzten Gleichung (1.21) treten die Ausdrücke $n - n_n(E)$ und $h - h_n(E)$ auf. Hier ist mindestens $n_n(E)$ eine stark nichtlineare Funktion der Feldstärke (Bild 6), doch können auch $h_n(E)$, $\tau_n(E)$ und $\tau_h(E)$ stark von E abhängen.

Es ist nicht möglich, die unter 1) und 2) angeführten Nichtlinearitäten zu umgehen, weil diese hauptsächlich eine Folge der vom Ohmschen Gesetz stark abweichenden Stromspannungskennlinie sind und eine solche Kennlinie Voraussetzung für das Auftreten wandernder Domänen ist.

Man ist also gezwungen, an anderer Stelle das Gleichungssystem drastisch zu vereinfachen. Da wir als Lösungen wandernde Domänen erwarten, die beim Fortschreiten ihre Gestalt

nicht ändern, kann man E , ρ , h und n als Funktion von $z = x + v_D t$ ansehen, wobei v_D die Domänengeschwindigkeit ist ((36), (29)). Diese Eigenschaft unserer Lösungen erlaubt es uns, die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche umzuschreiben. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dz} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = v_D \frac{d}{dz} .$$

Bei unserer Orientierung der Feldstärke in positive x -Richtung wird v_D positiv, wenn die Domäne in entgegengesetzte Richtung läuft. Die Gleichungen (1.21) nehmen dann die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} &= \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \quad , \quad \rho = e(N - n + h) \quad , \\ eD \frac{dn}{dz} &= j_0 - e\mu n E - v_D \rho \quad , \\ v_D \frac{dh}{dz} &= - \frac{n - n_n(E)}{\tau_n(E)} - \frac{h - h_n(E)}{\tau_h(E)} . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Da die rechten Seiten nicht explizit von z abhängen, ist dies ein dynamisches System von Differentialgleichungen ((46) S. 42) von der Bauart

$$\frac{du}{dz}^v = f_v(u_1, u_2, u_3) \quad (v = 1, 2, 3) . \tag{1.23}$$

In der mathematischen Literatur betrachtet man die Lösungskurven dieser Differentialgleichungen im u_1, u_2, u_3 -Raum, wobei z als Kurvenparameter auftritt. Bei der Diskussion solcher Lösungskurven oder Charakteristiken entstehen Schwierigkeiten, wenn stationäre (singuläre) Punkte auftreten; das sind die Punkte (u_1, u_2, u_3) , bei denen die Ableitungen der

Gleichungen (1.23) sämtlich verschwinden:

$$f_v(u_1, u_2, u_3) = 0 \quad (v = 1, 2, 3) \quad (1.24)$$

Wir wollen daher zunächst die stationären Punkte für unser Differentialgleichungssystem (1.22) bestimmen. Wegen des Verschwindens aller Ableitungen sind die Koordinaten (E, n, h) dieser Punkte gerade die Feldstärke- und Ladungsträgerdichtewerte, die bei homogener stationärer Feldverteilung bei der Stromdichte j_0 vorliegen. Die Feldstärke-Werte lassen sich sofort aus der Kennlinie im Bild 2 ermitteln; sie sind einfach durch die Schnittpunkte der Geraden j_0 mit der Kennlinie gegeben. Die Zahl der Schnittpunkte gibt an, wieviel singuläre Punkte das Gleichungssystem (1.22) hat. Man muß je nach der Größe der Stromdichte j_0 drei Fälle unterscheiden (Bild 2):

- 1.) $j_0 < j_{\min}$ oder $j_0 > j_{\max}$; ein Schnittpunkt, ein singulärer Punkt.
- 2.) $j_0 = j_{\min}$ oder $j_0 = j_{\max}$; ein Schnittpunkt, ein Berührungspunkt; zwei singuläre Punkte.
- 3.) $j_{\min} < j_0 < j_{\max}$; drei Schnittpunkte; drei singuläre Punkte.

Im folgenden werden wir uns nur für den letzten Fall interessieren, weil nur bei ihm die Kennlinie im negativ differentiellen Bereich geschnitten wird. Die drei Feldstärken und analog die drei singulären Punkte seien der Reihe nach mit den Indizes 1, 2 und 3 bezeichnet. Jetzt müssen noch die zu den Feldstärken E_1 , E_2 und E_3 gehörenden Konzentrationen n und h angegeben werden. Sie ergeben sich wegen der homogenen stationären Feldverteilung aus den Funktionen $n_n(E)$ und $h_n(E)$, wenn man die Feldstärken E_1 , E_2 und E_3 einsetzt. Die singulären Punkte des Gleichungssystems (1.22) sind also die folgenden:

$$(E_i, n_n(E_i), h_n(E_i)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.25)$$

4) Randbedingungen und Lösungskurven in der E_p -Ebene

Wir hatten bei der Ableitung des Gleichungssystems ein Gebiet hoher Feldstärke vorausgesetzt, das sich ohne Gestaltsänderung mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_D durch einen "unendlich langen" Kristall bewegt (Bild 7).

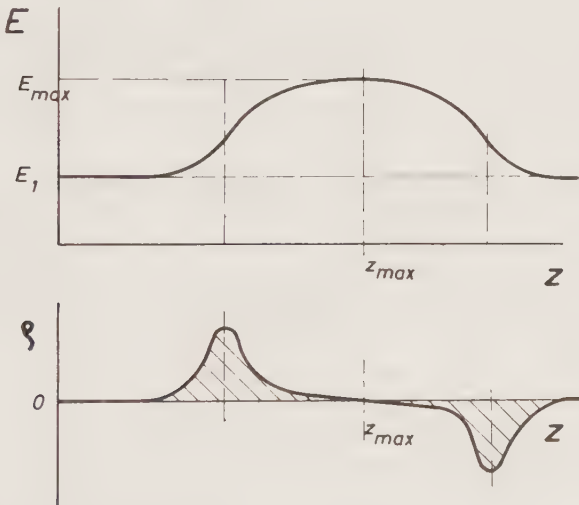


Bild 7: Feld- und Raumladungsdichteverteilung bei einer Domäne, die sich in einem Gebiet homogener Feldverteilung bewegt *).

*) Die auf Bild 7 eingezeichnete Feldstärke E_1 ist gerade die Feldstärke des stationären Punktes 1 (s.a. Bild 2). Um den singulären Punkt 2 kann es sich nicht handeln, weil sonst außerhalb der Domäne eine negative differentielle Leitfähigkeit vorliegen würde, was aber aus den in der Einleitung erwähnten thermodynamischen Gründen physikalisch abwegig ist. Auch der stationäre Punkt 3 kommt nicht in Frage, denn dann könnten sich keine Domänen hoher Feldstärke, sondern höchstens solche niedriger Feldstärke ausbilden (Näheres s. S. 48).

Betrachtet man die Raumladung als Funktion der Feldstärke für eine solche Domäne, so erhält man folgenden Verlauf:

- 1.) Für stark negative z ist $E = E_1$ und $\rho = 0$.
- 2.) Mit wachsendem z kommt man in Bild 7 zur linken Domänenflanke. Die Feldstärke wird größer als E_1 , die Raumladungsdichte wird positiv.
- 3.) An der Stelle $z_{\max}$ erreicht E den Maximalwert $E_{\max}$ und ρ wird Null.
- 4.) An der rechten Domänenflanke wird E mit wachsendem z wieder kleiner und ρ nimmt negative Werte an.
- 5.) Für stark positive z gilt wieder $E = E_1$ und $\rho = 0$.

Trägt man ρ als Funktion von E in einem Diagramm auf, so erhält man eine geschlossene Kurve (Bild 8), die mit wachsendem Parameter z im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wenn die Konstante v_D in den Differentialgleichungen (1.22) nicht mit der Domänengeschwindigkeit übereinstimmt, liefern die Gleichungen (1.22) keine solche geschlossene Lösungskurve. Mathematisch gesehen läuft damit die Bestimmung der Domänengeschwindigkeit auf ein Eigenwertproblem hinaus. Wir wollen die Lösungstheorie der Differentialgleichungen (1.22) an dieser Stelle zunächst nicht weiter verfolgen und dafür das Verhalten kleiner Störungen einer homogenen Feldverteilung untersuchen.

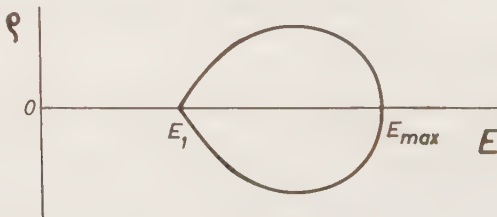


Bild 8: Raumladungsdichte in Abhängigkeit von der Feldstärke für die in Bild 7 gezeichnete Domäne.

II Kleine Störungen einer homogenen Feldverteilung bei negativem differentiellen Widerstand

1) Linearisierung des Gleichungssystems

Eingangs wurde schon erwähnt, daß homogene Feldverteilungen bei negativer differentieller Volumenleitfähigkeit nicht stabil sind. Es soll nun näher untersucht werden, von welcher Art diese Instabilität ist. Zu diesem Zweck werden kleine Störungen der homogenen Feldverteilung betrachtet und deren Verstärkung bzw. Dämpfung untersucht. Mathematisch bietet die Behandlung kleiner Störungen eine Reihe von Vorteilen, die hauptsächlich darauf beruhen, daß man das System partieller Differentialgleichungen (1.21) linearisieren kann. Das ist auch der Hauptgrund, warum die meisten theoretischen Arbeiten über wandernde Domänen zunächst von kleinen Störungen ausgehen ((26), (27), (32), (43), (48)). Ein weiterer Vorteil liegt darin, daß man im Gegensatz zu den Gleichungen (1.22) hier nicht die Voraussetzung machen muß, daß die Störungen lediglich Funktionen von $x + v_D t$ sind. Gerade weil man die Zeitableitungen in den Differentialgleichungen nicht durch einen speziellen Lösungsansatz zu eliminieren braucht, kann man ja anwachsende und abklingende Störungen untersuchen.

Wir betrachten eine homogene Feldverteilung im ganzen Halbleiter ($E = E_0$). Die zugehörigen Ladungsträger-Dichten kann man dann mit Hilfe der Kennlinien $n_n(E)$ (Bild 6) und $h_n(E)$ angeben; sie betragen

$$\begin{aligned}n_0 &= n_n(E_0) , \\ h_0 &= h_n(E_0) .\end{aligned}$$

Die Abweichungen von E_0 , n_0 und h_0 , die im folgenden untersucht werden sollen, seien mit ΔE , Δn und Δh bezeichnet; sie sollen so klein sein, daß man die Differentialgleichungen

(1.21) linearisieren kann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta E}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} \quad , \quad \varphi = c(\Delta h - \Delta n) \quad , \\ e D \frac{\partial \Delta n}{\partial x} &= -e \mu n_0 \Delta E - e \mu E_0 \Delta n - \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \Delta E}{\partial t} \quad , \\ \frac{\partial \Delta h}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau} \frac{dn_n(E)}{dE} \Big|_0 \Delta E - \frac{1}{\tau_n} \Delta n - \frac{1}{\tau_h} \Delta h \quad .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dabei sind die aus (1.10) folgende Gleichung

$$\frac{dn_n(E)}{dE} = \frac{dh_n(E)}{dE}$$

und die Abkürzung

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{\tau_n(E)} + \frac{1}{\tau_h(E)}$$

verwendet worden.

2) Die Dispersionsgleichung

Als Störungen seien nun zeitlich gedämpfte oder sich verstärkende Wellen betrachtet:

$$\frac{\Delta E}{\Delta E_0} = \frac{\Delta n}{\Delta n_0} = \frac{\Delta h}{\Delta h_0} = e^{-\frac{t}{\tau_d}} e^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad \tau_d, \omega, k \text{ reell} \tag{2.2}$$

ΔE_0 , Δn_0 und Δh_0 sind dabei komplexe Konstanten. Geht man mit diesem Ansatz in die linearisierten Differentialgleichungen (2.1) ein, dann erhält man nach kurzer Umformung das

folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} i \frac{\epsilon \epsilon_0}{e} k & 1 & -1 \\ \mu n_0 - \frac{\epsilon \epsilon_0}{e} (i\omega + \frac{1}{\tau_d}) & \mu E_0 + i k D & 0 \\ \frac{1}{\tau} \frac{dn_0(E)}{dE} \Big|_0 & \frac{1}{\tau_n} & \frac{1}{\tau_h} - (i\omega + \frac{1}{\tau_d}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E_0 \\ \Delta n_0 \\ \Delta h_0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Es hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Matrix verschwindet. Diese Bedingung liefert die komplexe Dispersionsgleichung. Sie lautet, wenn man die differentielle Leitfähigkeit $\frac{dj_n}{dE} = \frac{d}{dE} (e \mu n_n(E) E)$ und die dielektrische Relaxationszeit $\tau_R = \frac{\epsilon_0}{e \mu n_0}$ einführt:

$$\left\{ k^2 \frac{\omega}{k} \left(\mu E_0 + \frac{\omega}{k} \right) - \frac{1}{\tau_d^2} - \frac{1}{\tau_d} \left[k^2 D + \left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau} \right) \right] - \left[\frac{1}{\tau \tau_R} j_0 \frac{dn_0}{dE} \Big|_0 + \frac{k^2 D}{\tau_h} \right] \right\} + \quad (2.3)$$

$$+ i \left\{ \omega \left[k^2 D + \left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau} \right) \right] - 2 \frac{\omega}{\tau_d} + k \left[\frac{\mu E_0}{\tau_h} + \frac{D}{\mu E_0 \tau \tau_R} \left(- \frac{E_0}{n_0} \frac{dn_0(E)}{dE} \Big|_0 \right) \right] - k \frac{\mu E_0}{\tau_d} \right\} = 0 .$$

Da Realteil und Imaginärteil Null sein müssen, erhält man zwei reelle Gleichungen für k , ω und τ_d . Man kann also eine dieser drei Größen frei wählen und erhält dann die anderen aus der Dispersionsgleichung.

3) Wellen mit zeitlich konstanter Amplitude ($\tau_d = \infty$)

Wir wollen zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen zeitlich ungedämpfte Wellen auftreten können ($\tau_d = \infty$). Frequenz und Wellenvektor seien für diesen Fall mit ω_0 und k_0 bezeichnet. Außerdem sei die Phasengeschwindigkeit $v_0 = -\frac{\omega_0}{k_0}$ eingeführt, welche positiv gerechnet wird, wenn sich die Welle in negative x-Richtung bewegt. Um übersichtliche Ergebnisse zu erhalten, soll im folgenden die Ungleichung

$$\mu E_0 \gg v_0 \gg \frac{D}{\mu E_0 \tau_k} \quad (2.4)$$

vorausgesetzt werden, deren Gültigkeitsbereich an späterer Stelle (s. Ungleichungen (2.11) und (2.12)) angegeben wird. Man kann dann im Realteil der Dispersionsgleichung $\frac{\omega}{k}$ gegen

E_0 und $\frac{k^2 D}{\tau_h}$ gegen $k^2 \frac{\omega}{k} \mu E_0$ vernachlässigen und man erhält aus der Bedingung, daß der Realteil der Dispersionsgleichung verschwinden muß, den folgenden Ausdruck für die Wellenzahl k_0 :

$$k_0^2 = - \frac{1}{\mu E_0 v_0 \tau \tau_k} \frac{E_0}{j_0} \left. \frac{dj_n(E)}{dE} \right|_0. \quad (2.5)$$

Ungedämpfte Wellen sind also nur dann möglich, wenn eine negative differentielle Leitfähigkeit vorliegt. Wäre nämlich $\frac{dj_n(E)}{dE}$ positiv, dann müßte k_0 imaginär werden, was im Widerspruch zum Ansatz steht.

Zur Berechnung der noch unbekannten Phasengeschwindigkeit muß man den durch ω dividierten Imaginärteil der Dispersionsgleichung heranziehen:

$$k_0^2 D + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{v_0} \left[\frac{\mu E_0}{\tau_k} + \frac{D}{\mu E_0 \tau \tau_k} \left(- \frac{E_0}{n_0} \frac{dn_0(E)}{dE} \right) \right] = 0. \quad (2.6)$$

Setzt man hier den oben erhaltenen Wert für k_0^2 ein und berücksichtigt man den Zusammenhang

$$\frac{E_0}{j_0} \frac{dj_n(E)}{dE} \Big|_0 = \frac{1}{n_0} \frac{d}{dE} (n_n(E) E) \Big|_0 = 1 + \frac{E_0}{n_0} \frac{dn_n(E)}{dE} \Big|_0, \quad (2.7)$$

so erhält man für die Phasengeschwindigkeit einen Ausdruck, wie er in ähnlicher Form von Ridley (26) angegeben wurde:

$$v_0 = \frac{1}{1 + \frac{\tau_R}{\tau}} \left\{ \frac{\tau_R}{\tau_h} \mu E_0 + \frac{D}{\mu E_0 \tau} \right\}. \quad (2.8)$$

Die Phasengeschwindigkeit für ungedämpfte Wellen setzt sich aus zwei Summanden zusammen, von denen der erste proportional zur Feldstärke, der zweite proportional zum Diffusionskoeffizienten ist.

Im allgemeinen wird der erste Anteil größer sein als der zweite, doch kann für ein extrem kleines Zeitverhältnis $\frac{\tau_R}{\tau_h}$ auch das zweite Glied wichtig werden. Dazu folgendes Zahlenbeispiel:

Polke (47) hat an polykristallinen Schichten aus hexagonalem Selen etwa folgende Werte für die einzelnen Größen gemessen:

$$\mu \approx 10^{-1} \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}, \quad E_0 \approx 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}, \quad \tau \approx 10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_R \approx 10^{-6} \text{ s}.$$

$$D = \frac{\mu k T}{e} \approx 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Der diffusionsabhängige Anteil der Phasengeschwindigkeit bekommt damit den im Verhältnis zur Elektronendriftgeschwindigkeit ($\mu E_0 \approx 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$) sehr kleinen Wert von

$$v_{0D} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_R}{\tau}} \frac{D}{\mu E_0 \tau} \approx \frac{10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}}{10^{-1} \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 10^{-4} \text{s}} = 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Der feldproportionale Anteil der Phasengeschwindigkeit ist nur dann kleiner als der diffusionsproportionale Anteil, wenn

$$\frac{\tau_R}{\tau_h} \mu E_0 < \frac{D}{\mu E_0 \tau}$$

gilt. Diese Ungleichung läßt sich mit den oben gegebenen Zahlen nur für das sehr kleine Zeitverhältnis

$$\frac{\tau_R}{\tau_h} < 10^{-5}$$

erfüllen. Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. An späterer Stelle wird sich nämlich ergeben, daß die Formel für die Domänengeschwindigkeit sehr dem Ausdruck (2.8) für die Phasengeschwindigkeit einer ungedämpften Welle ähnelt. Domänengeschwindigkeiten von der Größenordnung $10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (die man zur Erklärung der niederfrequenten Strominstabilitäten braucht), sind nach der obigen Überschlagsrechnung also nur dann möglich, wenn τ_h um fünf bis sechs Zehnerpotenzen größer ist als die dielektrische Relaxationszeit (s.a. (30)).

Mit Hilfe der Formeln (2.5) und (2.8) kann man leicht die zu v_0 gehörige Wellenlänge λ_0 ausrechnen. Dazu sollen die beiden Fälle unterschieden werden, daß die Phasengeschwindigkeit v_0 proportional zu E_0 oder zu D ist:

a) $v_D \sim E_0$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \mu E_0 \tau_R \frac{\tau}{\sqrt{(\tau + \tau_R) \tau_h}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{E_0}{j_0} \frac{dj_n}{dE}|_0}} \quad (2.9)$$

Mit den obigen Zahlenwerten für polykristallines Selen und mit einer Zeit τ_h von 10^{-4} bis 10^{-2} s erhält man Wellenlängen von 10^{-3} bis 10^{-4} cm, wenn man annimmt, daß der Faktor

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{E_0}{j_0} \frac{dj_n}{dE}_0}}$$

die Größenordnung 1 hat.

b) $v_D \sim D$

$$\lambda_0 = \sqrt{D \tau_R} \sqrt{\frac{\tau}{\tau + \tau_R}} \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{E_0}{j_0} \frac{dj_n}{dE}_0}} \quad (2.10)$$

Die Wellenlänge ist in diesem Fall gleich der Debye-Länge oder gleich der Diffusionslänge, je nachdem, ob $\tau > \tau_R$ oder $\tau < \tau_R$ ist. Für die von Polke angegebenen Zahlenwerte ergibt sich

$$\lambda_0 = \sqrt{10^{-9}} \text{ cm} \approx 10^{-5} \text{ cm}.$$

Jetzt muß noch nachgeprüft werden, unter welchen Bedingungen die zu Beginn vorausgesetzte Ungleichung (2.4) gilt.

Die linke Seite sagt aus, daß die Phasengeschwindigkeit v_0 klein sein soll gegen die Elektronendriftgeschwindigkeit, und diese Forderung ist nach Gleichung (2.8) offensichtlich erfüllt, wenn

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_R \left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau} \right)} \\ \frac{D}{(\mu E_0)^2 (\tau + \tau_R)} \end{array} \right\} \ll 1 \quad (2.11)$$

gilt. (Für die obigen Zahlenwerte werden diese Ungleichungen befriedigt, wenn $\tau_h > 10^{-5}$ s ist.) Der rechte Teil der Ungleichung (2.4) läßt sich mit Hilfe von (2.8) in der Form

$$\frac{D}{(\mu E_0)^2} \left(\frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau} \right) \ll 1 \quad (2.12)$$

schreiben. Auch diese Forderung ist für die experimentellen Zahlenangaben von Polke sehr gut erfüllt.

4) Gedämpfte und sich verstärkende Wellen $\left(\frac{1}{\tau_d} \neq 0 \right)$

Die Ableitungen der letzten Seiten zeigen, daß es eine Wellenlänge λ_0 gibt, bei der die Amplituden der wellenförmigen Störungen zeitlich konstant bleiben. Was passiert aber nun bei kürzer- bzw. längerwelligen Störungen? Hierauf gibt wieder die Dispersionsgleichung (2.3) eine Antwort. Nehmen wir an, wir hätten eine Welle, die nur wenig von der ungedämpften Welle bezüglich der Phasengeschwindigkeit und der Wellenlänge abweicht. Dann kann man Störungsrechnung treiben und Abweichungen höherer Ordnung vom ungestörten Zustand weglassen. Mit den Bezeichnungen $v = -\frac{\omega}{k}$, $\Delta v = v - v_0$, $\Delta k = k - k_0$ folgt, wenn man Produkte wie $\Delta k \cdot \Delta v$, $\frac{1}{\tau_d^2}$ usw. vernachlässigt, aus Realteil und Imaginärteil von (2.3) *):

*) Wie schon an früherer Stelle wurde dabei wegen (2.4) im Realteil der Dispersionsgleichung $\frac{\omega}{k}$ gegen μE_0 und $\frac{k^2 D}{\tau_h}$ gegen $k^2 \frac{\omega}{k} \mu E_0$ vernachlässigt.

$$\Delta v \, k_o^2 + 2 \Delta k \, k_o \, v_o + \frac{1}{\mu E_o \tau_d} \left\{ k_o^2 D + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau} \right\} = 0 \quad , \quad (2.13)$$

$$\Delta v \left(k_o^2 D + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau} \right) + 2 \Delta k \, k_o \, D \, v_o + \frac{\mu E_o}{\tau_d} = 0 \quad .$$

Eliminiert man nun die Geschwindigkeitsdifferenz Δv , so folgt:

$$\frac{1}{\tau_d} \left\{ (\mu E_o k_o)^2 - (k_o^2 D + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau})^2 \right\} = 2 \Delta k \, k_o \, \mu E_o \, v_o \left(\frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau} \right) \quad . \quad (2.14)$$

Man kann sich mit Hilfe von (2.4), (2.5) und (2.8) überlegen, daß links in der Differenz das Glied $(\mu E_o k_o)^2$ überwiegt, so daß man mit $\frac{\Delta k}{k_o} = - \frac{\Delta \lambda}{\lambda_o}$ für τ_d die Formel

$$\frac{1}{\tau_d} = - 2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \frac{v_o}{\mu E_o} \left(\frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau} \right)$$

erhält. Störungen mit einer kleineren Wellenlänge als λ_o ($\Delta \lambda < 0$) werden also trotz des negativen differentiellen Widerstandes gedämpft, während Störungen mit größerer Wellenlänge sich aufschaukeln ((26), (48)). In Halbleitern mit kleineren Abmessungen als λ_o können sich daher keine Domänen ausbilden.

Die obigen Überlegungen galten nur, wenn die Phasengeschwindigkeit klein war gegen die Elektronendriftgeschwindigkeit. Beim Gunn Effekt ist dies nicht der Fall. Unabhängig von der Wellenlänge einer kleinen Störung ist dort die Phasengeschwindigkeit gleich der Elektronendriftgeschwindigkeit. Störungen mit einer kleineren Wellenlänge als der Debye Länge klingen ab, längerwelligere verstärken sich (49).

III Singuläre Punkte und Säkulargleichung

1) Linearisierung des Gleichungssystems (1.23) in der Nähe singulärer Punkte

Vor der Diskussion der physikalisch interessanten Eigenschaften des Gleichungssystems (1.22) ist es zweckmäßig, eine kurze Einführung in die Theorie der singulären Punkte zu geben^{*)}. Man betrachtet in der mathematischen Literatur die Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$\frac{du_v}{dz} = f_v(u_1 \dots u_n) \quad (v = 1 \dots, n) \quad (3.1)$$

im $u_1, \dots, u_n$ -Raum. z tritt dabei nur als Kurvenparameter in Erscheinung und hat keinen Einfluß auf die Form der Kurven. Wenn man sich nur für eine kleine Umgebung eines singulären Punktes interessiert, kann man die Funktionen f_v an diesem Punkt in eine Taylorreihe entwickeln, die man nach den linearen Gliedern abbricht^{**) :}

$$\frac{du_v}{dz} = \sum_{\mu=1}^n \left. \frac{\partial f_v}{\partial u_\mu} \right|_0 u_\mu \quad (v = 1 \dots, n) \quad (3.2)$$

Faßt man die u_v zu einem Vektor $\vec{u}$, die Koeffizienten $\left. \frac{\partial f_v}{\partial u_\mu} \right|_0$ zu einer Matrix A zusammen, so lautet diese Gleichung:

$$\frac{d}{dz} \vec{u} = A \vec{u} \quad (3.3)$$

^{*)} Ausführlichere Darstellungen dieses Gegenstandes finden sich in Lehrbüchern über Differentialgleichungen (z.B. (50), (51), (52)).

^{**) :} Der Einfachheit halber ist angenommen, daß sich der singuläre Punkt im Koordinatenursprung befindet.

Wenn die Matrix A nur voneinander verschiedene Eigenwerte α_v besitzt, erhält man als Lösung dieses linearen Gleichungssystems eine Linearkombination von Exponentialfunktionen (s.a. (50)):

$$\vec{u} = \sum_1^n \lambda_v \vec{c}_v e^{\alpha_v z} . \quad (3.4)$$

Die Vektoren $\vec{c}_v$ sind dabei die Rechtseigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten α_v , während die λ_v Integrationskonstanten bedeuten.

2) Einteilung der singulären Punkte für $n = 2$

Gleichung (3.4) vereinfacht sich dabei zu

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{c}_1 e^{\alpha_1 z} + \lambda_2 \vec{c}_2 e^{\alpha_2 z} . \quad (3.5)$$

Es können verschiedene Arten von singulären Punkten auftreten, je nachdem, ob die Eigenwerte reell sind und gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, oder ob sie konjugiert komplex sind.

- a) Die Eigenwerte α_1 und α_2 seien reell und haben gleiches Vorzeichen (Knotenpunkt).

Sind beide Eigenwerte positiv, dann tastet der Ortsvektor $\vec{u}$ mit wachsendem z eine Kurve ab, die vom singulären Punkt aus ($z = -\infty$) ins Unendliche läuft ($z = +\infty$).

Ist α_1 dem Betrage nach größer als α_2 , dann spielt der erste Summand von (3.5), solange z negativ ist, eine geringere Rolle als der zweite. Das hat zur Folge, daß die Charakteristik den singulären Punkt tangential zu der durch $\vec{c}_2$ bestimmten Geraden verläßt. Bild 9 zeigt einige Charakteristiken, die zu verschiedenen Integrationskonstanten λ_1, λ_2 gehören.

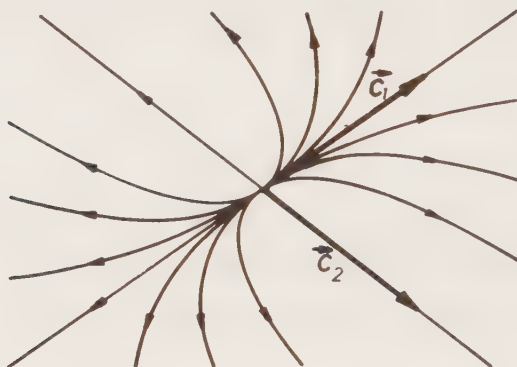


Bild 9: Knotenpunkt ($\alpha_1 > \alpha_2 < 0$).

Wenn α_1 und α_2 negativ sind, sieht das Bild genauso aus, lediglich der Durchlaufsinne der Kurven dreht sich um.

- b) Die Eigenwerte α_1 und α_2 sind reell und haben verschiedenes Vorzeichen (Sattelpunkt).

Es sei etwa $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$. Ähnlich wie eben kann man sich klarmachen, daß sich für diesen Fall die Lösungskurven verhalten wie auf Bild 10.

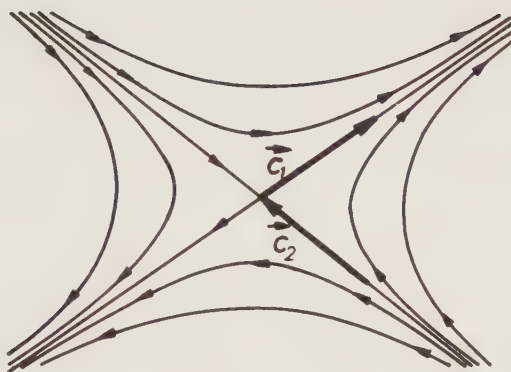


Bild 10: Sattelpunkt ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$).

- c) Die Eigenwerte α_1 und α_2 seien konjugiert komplex (Strudelpunkt)

$$\alpha_1 = \beta + i\gamma, \quad \alpha_2 = \beta - i\gamma \quad (3.6)$$

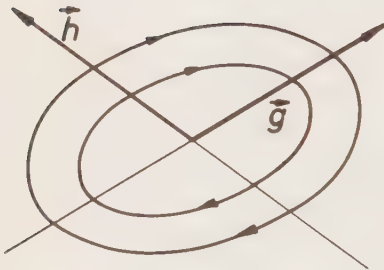
Man kann in diesem Fall auch die Eigenvektoren konjugiert komplex zueinander wählen. Wenn man reelle Lösungskurven haben will, müssen dann auch die Integrationskonstanten λ_1 und λ_2 konjugiert komplex sein:

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= \vec{g} + i\vec{h}, & \vec{c}_2 &= \vec{g} - i\vec{h}, \\ \lambda_1 &= \rho e^{i\varphi}, & \lambda_2 &= \rho e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Damit läßt sich die Gleichung (3.5) auf die Form

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \rho e^{\beta z} \left[(\vec{g} + i\vec{h}) e^{i(\gamma z + \varphi)} + (\vec{g} - i\vec{h}) e^{-i(\gamma z + \varphi)} \right] \\ &= 2\rho e^{\beta z} \left[\vec{g} \cos(\gamma z + \varphi) - \vec{h} \sin(\gamma z + \varphi) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

bringen. Für $\beta = 0$, d.h. imaginäre Eigenwerte, beschreibt der Ortsvektor $\vec{u}$ Ellipsen (Wirbelpunkt, Bild 11a). Für $\beta \neq 0$ ergeben sich Spiralen (Strudelpunkt, Bild 11b); diese winden sich mit wachsendem z vom singulären Punkt nach außen, wenn $\beta > 0$ ist, andernfalls laufen sie in den singulären Punkt hinein.



a) Wirbelpunkt
(imaginäre Eigenwerte)



b) Strudelpunkt
(konjugiert komplexe Eigenwerte)

Bild 11: Wirbelpunkt und Strudelpunkt

Im Dreidimensionalen ($n = 3$) sind die Charakteristiken im allgemeinen räumliche Kurven. Die in den einzelnen, von $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ bzw. von $\vec{g}$ und $\vec{h}$ aufgespannten Ebenen liegenden Charakteristiken verhalten sich wie auf den Bildern 9 bis 11. Bei konjugiert komplexen Eigenwerten treten ebenfalls Spiralkurven auf, die auf schalen- oder kegelförmigen Flächen in den singulären Punkt hinein oder aus ihm herauslaufen. Wenn zwei konjugiert imaginäre Eigenwerte vorliegen, ergeben sich Charakteristiken, die gegen geschlossene Kurven um den singulären Punkt streben (52).

3) Die Säkulargleichung

Die Eigenwerte α_i der Matrix A von Gleichung (3.3) müssen aus der Säkulargleichung

$$|A - \alpha E| = 0 \quad (3.9)$$

berechnet werden. Für eine dreireihige Matrix A ist diese eine Gleichung dritten Grades für α :

$$\alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0 \quad (3.10)$$

Ihre drei Wurzeln α_1 , α_2 und α_3 hängen mit den Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 in folgender Weise zusammen (53):

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \quad , \\ a_2 &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 \quad , \\ a_3 &= -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bei reellen Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 erhält man entweder

1.) drei reelle Wurzeln α_1 , α_2 , α_3

oder

2.) zwei konjugiert komplexe Wurzeln $\alpha_1 = \beta + i\gamma$, $\alpha_2 = \beta - i\gamma$ und eine reelle Wurzel α_3 . Liegen zwei konjugiert imaginäre Wurzeln vor ($\beta = 0$), dann besteht zwischen den Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 der Zusammenhang

$$a_3 = a_1 a_2 \quad , \quad a_2 > 0 \quad . \quad (3.12)$$

(Das kann man leicht einsehen, wenn man mit $\alpha_1 = i\gamma$,

$\alpha_2 = -i\gamma$ in die Gleichungen (3.11) eingeht und dann γ und α_3 eliminiert.) Imaginäre Eigenwerte entsprechen einem Wirbelpunkt im Dreidimensionalen.

Wenn ein Eigenwert, etwa α_3 , betragsmäßig viel größer ist als die beiden anderen, dann kann man die Wurzeln näherungsweise aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= -a_1 \quad , \\ a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 &= 0\end{aligned}$$

bestimmen und man erhält

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= \frac{1}{2a_1} (-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}) \quad , \\ \alpha_3 &= -a_1 \quad .\end{aligned}\tag{3.13}$$

α_1 und α_2 werden reell, wenn der Radikant positiv ist, andernfalls werden sie konjugiert komplex, und es liegt ein Strudelpunkt vor.

IV Lösungskurven in der E_ρ -Ebene

1) Eigenschaften der drei singulären Punkte in der E_ρ -Ebene

Wir wollen nun das Gleichungssystem (1.22) unter dem Gesichtspunkt der singulären Punkte näher untersuchen.

Die Charakteristiken sind Kurven im Enh-Raum, aus denen man entnehmen kann, wie n und h und damit auch die Raumladungsdichte ($\rho = e(N-n+h)$) von der elektrischen Feldstärke abhängen. Die Kurven, die man erhält, wenn man ρ als Funktion der Feldstärke aufträgt, werden im folgenden als Charakteristiken in der E_ρ -Ebene bezeichnet. Sie geben einen recht guten Überblick über die physikalisch wichtigen Eigenschaften des Gleichungssystems (1.22) und sollen deshalb nun näher betrachtet werden:

Wenn man den Parameter v_D in den Gleichungen (1.22) so gewählt hat, daß er gleich der Domänengeschwindigkeit ist, erwartet man in der E_ρ -Ebene eine geschlossene Charakteristik (Bild 8). Diese gestattet es, folgende Aussagen über die Art der drei singulären Punkte

$$(E = E_i, \rho = 0) \quad i = 1, 2, 3$$

in der E_ρ -Ebene zu machen (Bild 12) *):

- 1.) Der singuläre Punkt 1 muß ein Sattelpunkt sein. Die $\rho(E)$ -Kurve in Bild 8 startet nämlich im Punkt 1 und läuft wieder in ihn zurück, was nur bei einem Sattelpunkt, nicht aber bei einem Strudel- oder Knotenpunkt

*) Volkov (32), sowie Böer und Dussel (34) betrachten ebenfalls singuläre Punkte in der E_ρ -Ebene bzw. in der E_n -Ebene.

möglich ist.

- 2.) Der singuläre Punkt 3 muß dann aus physikalischen Gründen ebenfalls ein Sattelpunkt sein, weil er ebenso wie der singuläre Punkt 1 einer positiven differentiellen Leitfähigkeit zugeordnet ist (Bild 2).
- 3.) Der singuläre Punkt 2 unterscheidet sich von den beiden anderen physikalisch durch die negative differentielle Leitfähigkeit. Da diese wesentlich ist, damit geschlossene Lösungskurven auftreten können, erwartet man, daß der singuläre Punkt 2 ein Strudel- oder Wirbelpunkt im Innern der geschlossenen Kurve ist *).

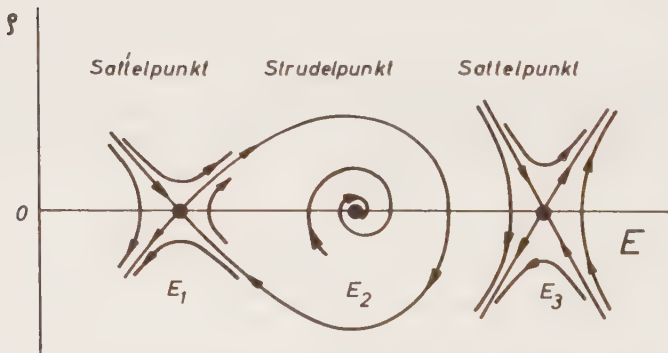


Bild 12: Charakteristiken in der Nähe der drei singulären Punkte in der $E\rho$ -Ebene

*) Böer und Dussel weisen darauf hin, daß bei zu stark falsch gewähltem Parameter v_D in den Differentialgleichungen (1.22) der singuläre Punkt 2 sogar ein Sattelpunkt werden kann.

2) Lösungskurven in der E_ρ -Ebene bei falsch gewählter Domänengeschwindigkeit

In Abschnitt I 4 war erwähnt worden, daß es keine geschlossene Charakteristik durch den singulären Punkt 1 gibt, wenn der Parameter v_D in (1.22) nicht mit der Domänengeschwindigkeit übereinstimmt. Mit Hilfe der singulären Punkte kann man sich nun leicht überlegen, wie dann die Lösungskurven aussehen müssen. Ist v_D zu groß ^{*)}, dann verläßt die Lösung den schraffierten Streifen der E_ρ -Ebene in Bild 13, und zwar bei nur wenig zu großem v_D auf der unteren linken Seite des Streifens, bei viel zu großem v_D auf der rechten Seite. Ist v_D zu klein, dann nähert sich die Charakteristik spiralförmig dem singulären Punkt 2 oder einem Grenzyklus, der den singulären Punkt 2 umschließt. In Bild 14 sind die entsprechenden Kurven in der zE -Ebene skizziert. Auch hier verlassen die Kurven den schraffierten Streifen, wenn v_D zu groß ist und bleiben in ihm, wenn v_D zu klein ist. Im letzteren Fall ergeben sich Domänenausläufer, die um die Feldstärke E_2 oszillieren (shock-waves, s. Volkov (31), (32)).

Eine noch bessere Übersicht über das Verhalten der Charakteristiken in der E_ρ -Ebene erhält man, wenn man nicht nur die vom singulären Punkt 1 ausgehenden Kurven betrachtet, sondern auch noch die vom singulären Punkt 3 ausgehenden mitunter sucht. Für etwas zu großes v_D ergeben sich dann die in Bild 15 gezeichneten Charakteristiken, bei zu kleinem v_D die in Bild 16 dargestellten.

In den beiden Bildern verhalten sich die Spiralen um den singulären Punkt 2 verschieden. Bei zu großem v_D laufen die Spiralen aus dem singulären Punkt heraus, bei zu kleinem winden sie sich in ihn hinein.

^{*)} Eine Begründung dafür, daß die Lösungskurven bei zu großem v_D nach außen und nicht nach innen laufen, liefern zum Beispiel die numerischen Rechnungen in Kapitel VII.

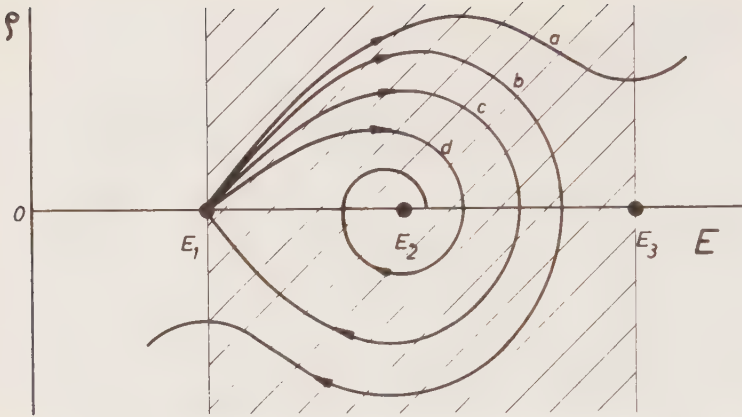


Bild 13: Charakteristiken durch den singulären Punkt 1, die zu falsch gewähltem v_D in (1.22) gehören.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) zu großes v_D | c) richtiges v_D |
| b) zu großes v_D | d) zu kleines v_D |

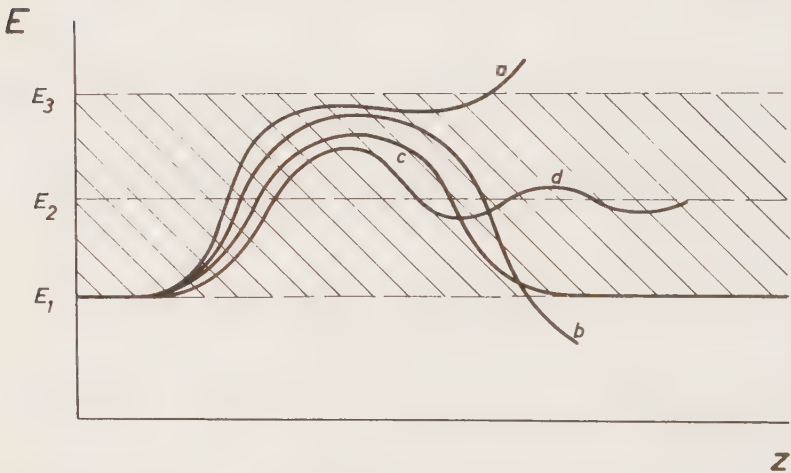


Bild 14: Die zu den in Bild 13 gezeichneten Charakteristiken gehörenden Domänenformen.

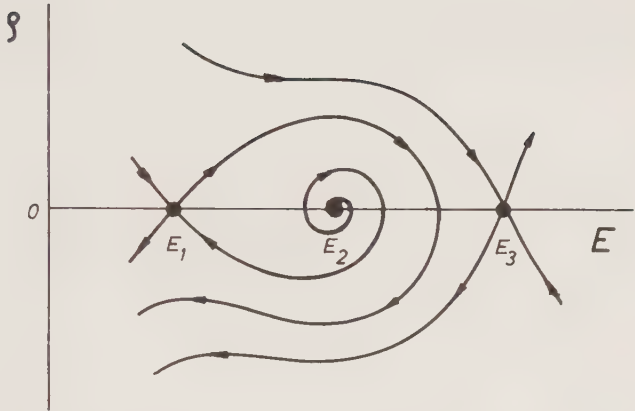


Bild 15: Charakteristiken durch die singulären Punkte 1 und 3 bei zu großem Parameter v_D in (1.22)

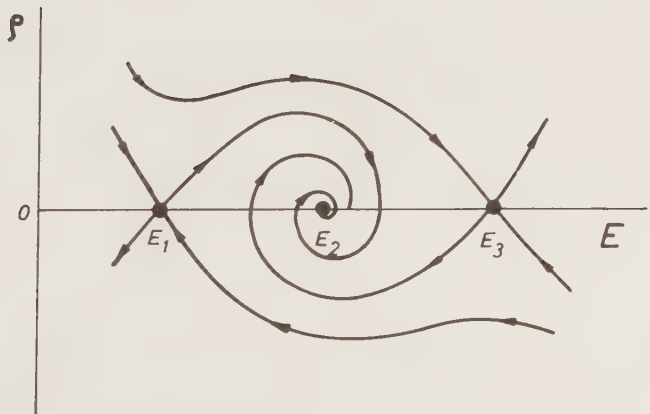


Bild 16: Charakteristiken durch die singulären Punkte 1 und 3 bei zu kleinem v_D

Wenn dies streng gelten würde, hätte man ein gutes Verfahren, um die Domänengeschwindigkeit zu bestimmen. Man brauchte dann nur dafür zu sorgen, daß in der Nähe des singulären Punktes 2 weder nach innen noch nach außen laufende Spiralen auftreten, oder mit anderen Worten, man muß den Parameter v_D so bestimmen, daß der singuläre Punkt 2 ein Wirbelpunkt ist ^{*)}.

Diese Methode liefert im allgemeinen nicht genau die richtige Domänengeschwindigkeit. Das wäre nur dann der Fall, wenn alle Kurven um den singulären Punkt geschlossen wären (Bild 18). Das kann man aber nicht von vornherein annehmen, weil zum Beispiel auch Grenzzyklen auftreten können (Bild 18). Die Lage solcher Grenzkurven hängt vom Parameter v_D ab. Die richtige Domänengeschwindigkeit erhält man, wenn der Grenzzyklus gerade durch den singulären Punkt 1 geht. Läßt man v_D kontinuierlich immer kleiner werden, so zieht sich die Grenzkurve immer enger um den singulären Punkt zusammen. Schließlich wird der Punkt 2 zum Wirbelpunkt und dann zum Strudelpunkt mit nach innen laufenden Lösungskurven.

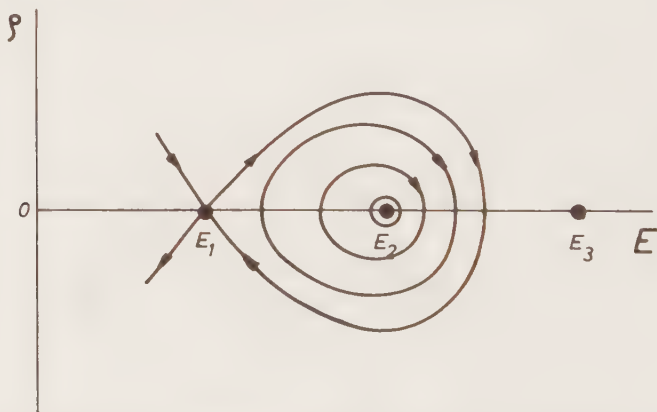


Bild 17: Geschlossene Charakteristiken um den singulären Punkt 2

^{*)} Böer und Dussel haben nach diesem Prinzip die Domänengeschwindigkeit bestimmt (34), aber eine wesentlich speziellere Formel erhalten als in dieser Arbeit.

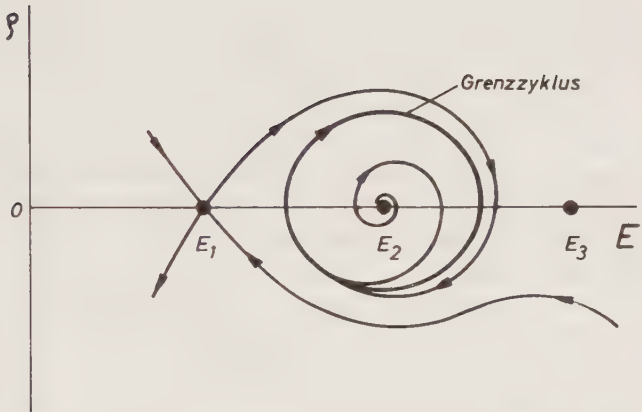


Bild 18: Grenzzzyklus

Ob die Methode, v_D so zu bestimmen, daß der singuläre Punkt 2 ein Wirbelpunkt ist, zu guten Ergebnissen für die Domänen-
geschwindigkeit führt oder nicht, hängt davon ab, wie stark
sich der Grenzzzyklus mit v_D verändert. Numerische Lösungen
der nichtlinearen Differentialgleichungen zeigen, daß die
Methode zu brauchbaren Ergebnissen führt (Kapitel VII).

3) Die Abhängigkeit der Domänenform vom Gesamtstrom j_0

Die Gesamtstromdichte j_0 ist eine Konstante, die bei der Inte-
gration der Kontinuitätsgleichung für die Raumladung auftritt
(s. S. 19). j_0 kann innerhalb bestimmter Grenzen durch die

Bedingungen im äußeren Stromkreis noch beliebig vorgegeben werden. Wie wirkt sich nun eine Veränderung des Gesamtstromes auf die Lösungskurven in der E_0 -Ebene aus? Dazu betrachten wir zunächst Bild 2. Die Stromdichte j_0 wird dort durch eine waagrechte Gerade dargestellt, welche die Stromspannungskennlinie in drei Punkten schneidet, die den singulären Punkten 1, 2 und 3 zugeordnet sind. Verschiebt man die Gerade j_0 nach oben, so rücken die Singularitäten 1 und 2 zusammen, ja sie können im Grenzfall, wenn die Gerade das Maximum der Kennlinie berührt, sogar zusammenfallen. Wenn man die Gerade nach unten verschiebt, rücken die Singularitäten 2 und 3 immer dichter zusammen. Die Lageänderungen der singulären Punkte haben erhebliche Auswirkungen auf die Charakteristiken in der E_0 -Ebene. Solange j_0 in der Nähe des Maximums der $j_H(E)$ Kennlinie liegt, gibt es geschlossene Lösungen durch den singulären Punkt 1 (Bild 8). Verkleinert man j_0 , dann umgrenzt die geschlossene Lösung eine immer größere Fläche und läuft immer dichter am singulären Punkt 3 vorbei, bis sie schließlich bei einer Gesamtstromdichte, die im folgenden mit j_∞ bezeichnet sei, sowohl durch den singulären Punkt 1 als auch durch den singulären Punkt 3 läuft (Bild 19). Senkt man j_0 noch weiter ab, so sind geschlossene Lösungen durch den singulären Punkt 1 nicht mehr möglich, aber dafür gibt es jetzt geschlossene Charakteristiken durch den singulären Punkt 3. Die zu den eben betrachteten Fällen gehörenden Domänenformen sind in Bild 19 gezeichnet.[†]) Für $j_0 > j_\infty$ ergeben sich Domänen hoher Feldstärke, für $j_0 < j_\infty$ Domänen niederer Feldstärke. Im Grenzfall $j_0 = j_\infty$ wird die Domäne unendlich lang und es ist möglich, sie als Domäne hoher Feldstärke und als Domäne niederer Feldstärke zugleich zu interpretieren. Die Feldstärke außerhalb der Domäne ist für $j_0 > j_\infty$ gleich E_1 , für $j_0 < j_\infty$ aber gleich E_3 . Bisher sind hauptsächlich Domänen hoher Feldstärke im Experiment beobachtet worden, so daß in solchen Fällen j_∞ die kleinstmögliche Gesamtstromdichte wäre. Im Gegensatz hierzu hatte sich nach den thermodynamischen Überlegungen von Ridley (1), die in der Einleitung kurz skizziert worden waren, die Stromdichte $j_{\min}$ (s. Bild 2a) ergeben.

[†]) s.a. Knight u. Peterson, Phys.Rev. 155, 393 (1967)

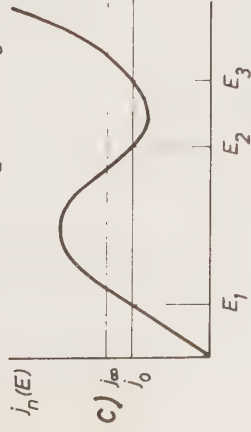
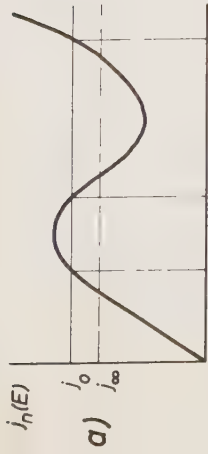
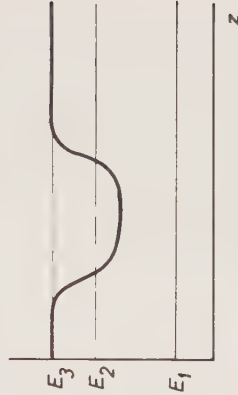
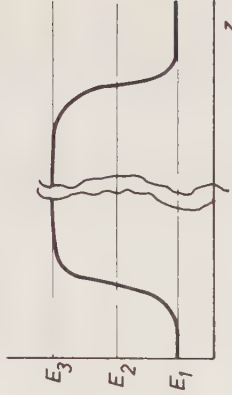
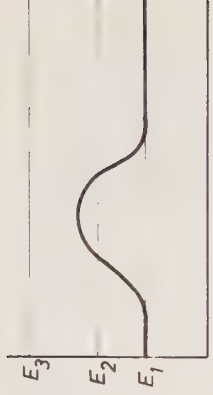
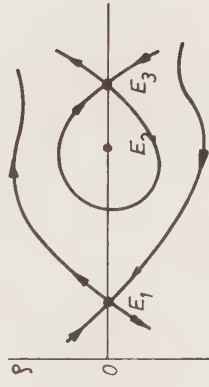
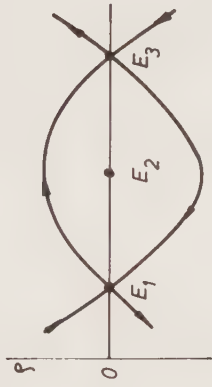
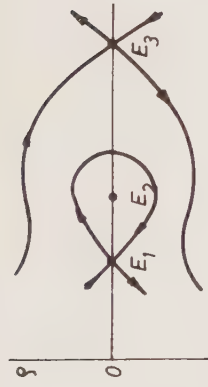


Bild 19



$\varphi(E)$ -Kurven und Domänenformen bei verschiedenem Gesamtstrom **a) $j_0 > j_\infty$; b) $j_0 = j_\infty$; c) $j_0 < j_\infty$.**

Über diesen Widerspruch braucht man sich nicht zu wundern, weil Ridley recht grobe Annahmen über die Feldverteilung (s. Bild 2b) gemacht hatte. Butcher (36) und Volkov (31) haben als erste darauf hingewiesen, daß die Gesamtstromdichte größer sein muß als $j_{\min}$. Domänen niedriger Feldstärke sind für den Gunn Effekt von Copeland vorausgesagt worden (54).

V Bestimmung der Domänengeschwindigkeit und der Abklinglängen der Domänenausläufer

1) Linearisierung des Gleichungssystems (1.22) in der Nähe der drei singulären Punkte

Wir wollen nun das Gleichungssystem (1.22) in der Nähe der singulären Punkte linearisieren. Dazu führen wir anstelle von E, n, h die auf den jeweils betrachteten singulären Punkt ($i = 1, 2, 3$) bezogenen Differenzen

$$\begin{aligned}\Delta E &= E - E_i, \\ \Delta n &= n - n_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \Delta h &= h - h_i,\end{aligned}\tag{5.1}$$

ein. Das Gleichungssystem (1.22) lautet dann in linearisierter Form ^{*)}:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta E}{dz} &= \frac{e}{\varepsilon \varepsilon_0} (-\Delta n + \Delta h), \\ \frac{d\Delta n}{dz} &= \frac{1}{D} \left\{ -\mu n_i \Delta E - (\mu E_i - v_3) \Delta n - v_3 \Delta h \right\}, \\ \frac{d\Delta h}{dz} &= -\frac{1}{v_3} \left\{ -\left(\frac{1}{\tau_{hi}} \frac{dh_i(E)}{dE} \right) \Delta E + \frac{1}{\tau_{ni}} \frac{dn_i(E)}{dE} \Delta E + \frac{1}{\tau_{ni}} \Delta n + \frac{1}{\tau_{hi}} \Delta h \right\}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

In der letzten Gleichung kann man noch eine Vereinfachung vornehmen, wenn man beachtet, daß nach (1.10) die Ableitungen $\frac{dn}{dE}$ und $\frac{dh}{dE}$ gleich sein müssen. Mit der Abkürzung

^{*)} Der Index i deutet an, daß die betreffenden Größen am singulären Punkt i zu nehmen sind: $\tau_i = \tau(E_i)$, $\tau_{ni} = \tau_n(E_i)$ usw..

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{ni}} + \frac{1}{\tau_{hi}}$$

schreibt sich dann das Gleichungssystem in der Matrixform $\frac{d}{dz} \vec{u} = A \vec{u}$:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta n \\ \Delta h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} & +\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} \\ -\frac{\mu n_i}{D} & -\frac{\mu E_i - v_D}{D} & -\frac{v_D}{D} \\ \frac{1}{\tau_i v_D} \frac{dn_a(E)}{dE} & -\frac{1}{v_D \tau_{ni}} & -\frac{1}{v_D \tau_{hi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta n \\ \Delta h \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Die Eigenwerte der dreireihigen Matrix A müssen aus der Säkulargleichung bestimmt werden:

$$|A - \alpha E| = 0.$$

Die Auflösung der Determinante ergibt eine Gleichung dritten Grades in α

$$\alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0,$$

deren Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 in diesem Fall folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mu E_i - v_D}{D} + \frac{1}{\tau_{hi} v_D}, \\ \alpha_2 &= \frac{\mu E_i}{D \tau_{hi} v_D} - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_{hi}} \right) - \frac{1}{\mu E_i \tau_{hi} \tau_i v_D} \left. \frac{E_i}{n_i} \frac{dn_a(E)}{dE} \right|_i, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{D v_D \tau_i \tau_{hi}} \left. \frac{E_i}{j_0} \frac{dj_n}{dE} \right|_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei wurde in den beiden letzten Gleichungen die dielektrische Relaxationszeit

$$\tau_{Ri} = \frac{\epsilon \epsilon_0}{e \mu n_i}$$

eingeführt. Ferner wurden bei der Ableitung von a_3 die beiden Beziehungen

$$j_0 = e \mu n_i E_i \quad ,$$

$$\left. \frac{E_0}{j_0} \frac{dj_0}{dE} \right|_i = \frac{1}{n_i} \frac{d}{dE} (n_i(E) E)_i = 1 + \frac{E_i}{n_i} \left(\frac{dn_i(E)}{dE} \right)_i \quad (5.5)$$

verwendet.

2) Domänengeschwindigkeit

Die Domänengeschwindigkeit soll dadurch bestimmt werden, daß der singuläre Punkt 2 zum Wirbelpunkt gemacht wird. Wenn ein Wirbelpunkt vorliegt, hat die Matrix A zwei konjugiert imaginäre Eigenwerte und zwischen den Koeffizienten a_i der Säkulargleichung besteht der Zusammenhang (s. Gl. (3.12))

$$a_3 = a_1 a_2 \quad ,$$

welcher eine Bestimmungsgleichung für die Domänengeschwindigkeit darstellt. Wir wollen uns auf kleine Domänengeschwindigkeiten beschränken und die Ungleichung

$$\mu E_i \gg v_D \gg \frac{D}{\mu E_i \tau_{hi}} \quad (5.6)$$

voraussetzen (s.a. (2.4)).

Der Zusammenhang $a_3 = a_1 a_2$ zwischen den Koeffizienten der Säkulargleichung lautet dann mit (5.4):

$$-\frac{1}{D \tilde{\nu}_2 \tilde{\tau}_{R2}} \frac{E_2}{\int_0^{\cdot} \frac{dn}{dE}} \Big|_2 =$$

$$= \frac{\mu E_2}{D} \left\{ \frac{\mu E_2}{D \tilde{\tau}_{R2} \tilde{\nu}_2} - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}_2} + \frac{1}{\tilde{\tau}_{R2}} \right) - \frac{1}{\mu E_2 \tilde{\tau}_{R2} \tilde{\tau}_2 \tilde{\nu}_2} \frac{E_2}{n_2} \frac{dn}{dE} \Big|_2 \right\}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe von (5.5) die Domänengeschwindigkeit

$$\tilde{\nu}_3 = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{\tau}_{R2}}{\tilde{\tau}_2}} \left\{ \frac{\tilde{\tau}_{R2}}{\tilde{\tau}_{R2}} \mu E_2 + \frac{D}{\mu E_2 \tilde{\tau}_2} \right\} \quad (5.7)$$

welche der Struktur nach völlig mit der Phasengeschwindigkeit (2.8) für ungedämpfte Wellen kleiner Amplitude übereinstimmt. Darüber braucht man sich eigentlich nicht zu wundern, denn beide Geschwindigkeiten sind aus linearisierten Differentialgleichungen abgeleitet worden. Einen ähnlichen Ausdruck für die Domänengeschwindigkeit hat Bonch-Bruevich auf anderem Wege für langgestreckte und nahezu symmetrische Domänen abgeleitet ((29), (30)). Seine Formel unterscheidet sich von (5.7) dadurch, daß nicht die Feldstärke- und Lebensdauerwerte am singulären Punkt 2, sondern an dem in Bild 8 mit $E_{\max}$ bezeichneten Neutralitätspunkt zu nehmen sind. Den Gültigkeitsbereich der Formel (5.7) kann man auf ähnliche Weise wie in Abschnitt II 3 durch die Ungleichungen (2.11) und (2.12) abgrenzen.

Kalashnikov und Bonch-Bruevich haben gezeigt, daß beim Au- und Cu-dotierten Germanium die experimentell beobachteten Domänengeschwindigkeiten sich auf der Grundlage der Formel (5.7) verstehen lassen (30). Sie geben folgende Werte an:

a) Für Cu-dotiertes Germanium:

$$\tau_R \approx 10^{-9} \text{ bis } 10^{-7} \text{ s}, \tau \approx 10^{-5} \text{ s}, \mu E \approx 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, D \approx 10 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Wenn das feldproportionale Glied von (5.7) klein ist gegen das zum Diffusionskoeffizienten proportionale, erhält man mit diesen Zahlen eine Domänengeschwindigkeit von $v_D = \frac{D}{\mu E \tau} \approx 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, welche die niederfrequenten Strominstabilitäten verständlich macht. Die Zeit τ_h muß dabei genügend groß sein, nämlich

$$\tau_h \gg \frac{\tau \tau_R (\mu E)^2}{D} \approx 10^{-3} \text{ s bis } 10^{-1} \text{ s}.$$

b) Für Au-dotiertes Germanium geben Kalishnikov und Bonch-Bruevich folgende Zahlen an:

$$\tau_R \approx 10^{-6} \text{ bis } 10^{-8} \text{ s}, \tau \approx 10^{-1} \text{ bis } 10^{-6} \text{ s}, \mu E \approx 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$D \approx 10 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Wenn τ_h in der Größenordnung von Sekunden und Minuten liegt, liefert Gleichung (5.7) wieder sehr kleine Domänengeschwindigkeiten von etwa $10^{-3} \text{ bis } 10^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Für die Messungen von Polke und Hasler an polykristallinen Schichten aus hexagonalem Selen war schon in Abschnitt II 3 gezeigt worden, daß die Formel (5.7) auf brauchbare Ergeb-

nisse führt, aber auch die Messungen von Böer und Mitarbeitern am CdS sind damit erklärbar. Legt man nämlich die folgenden Angaben von Böer (5) zugrunde,

$$\tau_R \approx 10^{-6} \text{ s}, \tau \approx 10^{-4} \text{ s?}, \mu E \approx 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, D \approx 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}},$$

so erhält man für $\tau_h > 10^2 \text{ s}$ eine Domänengeschwindigkeit von $10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Allen angegebenen Beispielen ist gemeinsam, daß kleine Domänengeschwindigkeiten nur auftreten können, wenn τ_h in der Größenordnung von Sekunden liegt. Es gibt experimentelle Hinweise dafür, daß diese großen Zeiten tatsächlich vorliegen ((30), (3)).

3) Domänenausläufer

Wir wollen uns nun mit den Ausläufern beschäftigen, die links und rechts von der Domäne in das Gebiet homogener Feldverteilung abklingen (Bild 20). Diese lassen sich durch die linearen Differentialgleichungen (5.3) beschreiben, wenn man die einzelnen Elemente der Matrix an der singulären Stelle 1 nimmt ($i = 1$). Die Lösungen der Gleichungen (5.3) sind Linearkombinationen von Exponentialfunktionen $\exp(\alpha_v z)$, wobei die α_v die Eigenwerte der Matrix von (5.3) sind. Man kann also die Abweichung ΔE von der Feldstärke E_1 in der folgenden Form ansetzen:

$$\Delta E = \sum_{v=1}^3 \epsilon_v e^{\alpha_v z}, \quad (\epsilon_v \text{ Konstanten}).$$

Da ΔE für den vorderen Domänenausläufer in Richtung negativer

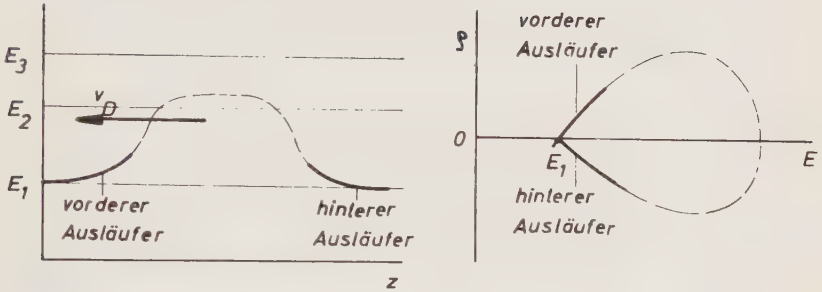


Bild 20: Domänenasyläufer

z -Werte abklingen muß, können nur die Glieder mit positivem Eigenwert eine Rolle spielen, und zwar ist der Summand mit dem kleinsten positiven Eigenwert der wichtigste, weil er am langsamsten abklingt. Entsprechendes gilt für den hinteren Domänenasyläufer. Bezeichnet man mit α^+ den kleinsten positiven, mit α^- den betragsmäßig kleinsten negativen Eigenwert, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta E \sim e^{\alpha^+ z} & \quad (\text{vorderer Ausläufer}) , \\ \Delta E \sim e^{\alpha^- z} & \quad (\text{hinterer Ausläufer}) . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Nun sollen die Abklinglängen

$$l^+ = \frac{1}{\alpha^+} , \quad l^- = \frac{1}{\alpha^-}$$

der Domänenasyläufer für den Spezialfall ausgerechnet werden,

daß einer der drei Eigenwerte der Matrix von (5.3) betragsmäßig sehr viel größer ist als die beiden anderen. Man kann dann die Formel (3.11) verwenden:

$$\alpha^{+,-} = \frac{1}{2a_1} \left(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} \right)$$

Im allgemeinen sind α^+ und α^- dem Betrage nach verschieden groß, so daß vorderer und hinterer Domänenausläufer verschieden schnell abklingen. Wenn aber

$$|a_2| \ll \sqrt{|a_1 a_3|} \quad (5.9)$$

ist, erhält man symmetrische Ausläufer. Da sich dieser Fall am leichtesten mathematisch behandeln läßt, soll er im folgenden weiter betrachtet werden. Mit (5.6) und (5.4) gilt dann:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\mu E_1 v_2 \tau_1 \tau_{R1}} \frac{E_1}{j_0} \frac{dj_n}{dE}} \quad (5.10)$$

Setzt man hier die Domänengeschwindigkeit (5.7) ein, so ergibt sich für diffusionsabhängige Domänengeschwindigkeiten die Abklinglänge

$$l = \frac{1}{\alpha} = \gamma \sqrt{D \frac{\tau_2 \tau_{R2}}{\tau_2 + \tau_{R2}}} \quad (5.11)$$

wobei γ ein dimensionsloser Faktor ist:

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_1 \tau_1 \tau_{R1}}{E_2 \tau_2 \tau_{R2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_1}{j_0} \frac{dj_n}{dE}_1}} \quad (5.12)$$

Wenn γ etwa die Größenordnung 1 hat, ist 1 für $\tau > \tau_R$ gleich der Debyelänge, für $\tau < \tau_R$ gleich der Diffusionslänge.

Für feldabhängige Domänenengeschwindigkeit bekommt man die Abklinglänge

$$\ell = \frac{1}{\alpha} = \gamma \mu E_2 \tau_{R2} \frac{\tau_2}{\gamma(\tau_2 + \tau_{R2}) \tau_{h2}} \quad (5.13)$$

Die so berechneten Abklinglängen haben große Ähnlichkeit mit den in Abschnitt II abgeleiteten Wellenlängen für ungedämpfte Wellen.

Mit Hilfe des Eigenwertes α (s. (5.10)) läßt sich für symmetrische Domänen eine einfache Abschätzungsformel für die Raumladungsdichte in den Domänenflanken angeben: Wenn man annimmt, daß ρ an der Stelle E_2 seinen betragsmäßig größten Wert erreicht (s. Bild 21), so gilt wegen der Poissonschen Gleichung und wegen (5.8):

$$|\rho| < (E_2 - E_1) \left| \left(\frac{d\rho}{dE} \right)_1 \right| < E_2 \left| \left(\frac{d\rho}{dE} \right)_1 \right| = E_2 \epsilon \epsilon_0 |\alpha| \quad (5.14)$$

Die Formeln für die Domänenausläufer und für die Raumladungsdichte gelten nur, wenn (5.9) erfüllt ist. Wenn γ (s. (5.12)) von der Größenordnung 1 ist, kann man mit Hilfe von (5.4), (5.6) und (5.7) nach etwas umständlichen Abschätzungen zeigen, daß die Forderung (5.9) unter den Voraussetzungen

$$\sqrt{\frac{\tau + \tau_R}{\tau_h}} \ll 1 \quad (5.15)$$

$$\sqrt{\frac{D}{(\mu E)^2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R} \right)}} \ll 1$$

erfüllt ist.

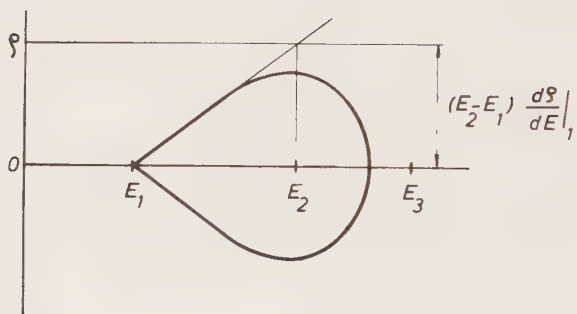


Bild 21: Zur Erläuterung der Abschätzungen in Formel (5.14)

VI Die nichtlineare Theorie

1) Bestimmung der Domänengeschwindigkeit aus den nichtlinearen Differentialgleichungen (1.22)

Die bisher wichtigsten quantitativen Ergebnisse, nämlich die Formeln (2.8) und (5.7) für die Domänengeschwindigkeit, wurden entweder aus der linearen Theorie (Kapitel II) oder aus dem Studium der Lösungskurven in unmittelbarer Nähe der singulären Punkte des Gleichungssystems (1.22) gewonnen. Nachdem die Domänengeschwindigkeit bekannt war, konnten die Abklinglängen der Domänenausläufer und eine Abschätzungsformel für die Raumladungsdichte in den Domänenflanken angegeben werden (s. (5.14)). Noch genauere Aussagen über die Form der Domänenflanken und die Domänengeschwindigkeit lassen sich aber nur mit Hilfe der nichtlinearen Theorie gewinnen.

Wir wollen zunächst die Domänengeschwindigkeit aus den nichtlinearen Differentialgleichungen (1.22) ermitteln. Dazu schreiben wir diese mit Hilfe von $\frac{dz}{dE} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \frac{d}{dE}$ auf die folgende Form um:

$$\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} \rho D \frac{dn}{dE} = j_0 - e \mu n E - v_D \rho, \quad \rho = e(N - n + h), \quad (6.1)$$

$$\frac{v_D}{\epsilon \epsilon_0} \rho \frac{dh}{dE} = - \frac{n - n_n(E)}{\tau_n(E)} - \frac{h - h_n(E)}{\tau_h(E)}. \quad (6.2)$$

Setzt man in (6.2) die aus (6.1) und (1.10) folgenden Ausdrücke

$$\frac{dh}{dE} = \frac{1}{e} \frac{d\rho}{dE} + \frac{dn}{dE}$$

und $h - h_n(E) = \frac{p}{e} + (n - n_n(E))$

ein, so folgt mit

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{\tau_n(E)} + \frac{1}{\tau_h(E)} \quad :$$

$$\frac{v_D}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{e}{e} \frac{dp}{dE} + \frac{v_D p}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{dn}{dE} = \frac{n - n_n(E)}{\tau(E)} - \frac{p}{e \tau_h(E)} \quad (6.3)$$

Löst man nun Gleichung (6.1) nach n auf und setzt man den erhaltenen Ausdruck auf der rechten Seite von (6.3) ein, so erhält man bei Beachtung von

$$j_n(E) = e \mu n_n(E) \quad , \quad \tau_R(n) = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e \mu n} :$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{v_D}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{d(p^2)}{dE} + p \left\{ - \frac{v_D}{\mu E} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R(n)} \left(- \frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\tau_h} + \frac{D}{(\mu E)^2 \tau \tau_R(n)} \left(- \frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] \right\} = \frac{j_n(E) - j_0}{\mu E \tau(E)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Mit Hilfe von $\frac{p}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{d}{dE} = \frac{d}{dz}$ erhält diese Gleichung die Form:

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon_0 v_D \frac{d^2 E}{dz^2} + \varepsilon \varepsilon_0 \left\{ - \frac{v_D}{\mu E} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R(n)} \left(- \frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\tau_h} + \frac{D}{(\mu E)^2 \tau \tau_R(n)} \left(- \frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] \right\} \frac{dE}{dz} = \frac{j(E) - j_0}{\mu E \tau(E)} \quad (6.5) \end{aligned}$$

Ein Ausdruck ähnlicher Art wurde bereits von Volkov ((31), (32)) abgeleitet, allerdings unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms. Die Gleichung (6.5) hat eine gewisse formale Ähnlichkeit mit der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse m , der unter dem Einfluß der Potentialkraft $K(x)$ und der Reibungskraft $-r(x, \dot{x})\dot{x}$ in einer Potentialsenke hin und herschwingt:

$$m\ddot{x} + r(x, \dot{x})\dot{x} = K(x) .$$

Ungedämpfte Schwingungen treten nur dann auf, wenn das Integral

$$-\oint r(x, \dot{x})\dot{x}dx$$

über die Reibungskräfte verschwindet. Ganz analog liefert die Gleichung (6.5) nur dann geschlossene Lösungen in der $E\rho$ -Ebene, wenn gilt^{*)}:

$$\oint \rho \left\{ -\frac{v_D}{\mu E} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_k(n)} \left(-\frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] + \left[\frac{1}{\tau_k} + \frac{D}{\mu E \tau \tau_k(n)} \left(-\frac{E}{n} \frac{dn}{dE} \right) \right] \right\} dE = 0 \quad (6.6)$$

Das Umlaufintegral enthält als wichtigsten Parameter die Domänengeschwindigkeit und verschwindet nur, wenn diese geeignet gewählt wird. Man könnte also aus (6.6) die Domänengeschwindigkeit ausrechnen, wenn ρ und n als Funktion von E bekannt wären. Wenn Diffusionsstrom und Verschiebungsstrom klein sind gegen den Feldstrom^{**)}, kann man mit Hilfe von

$$n = \frac{j_0}{e\mu E} , \quad (6.7)$$

$$-\frac{E}{n} \frac{dn}{dE} = 1$$

*) Dieser Gedankengang findet sich in den Arbeiten ((31), (32)) von Volkov.

**) Für symmetrische Domänen kann man dies in ähnlicher Weise wie Volkov (32) zeigen.

die Domänengeschwindigkeit in der Form

$$v_D = \frac{\oint \mu E \rho \left[\frac{1}{\tau_2(E)} + \frac{j_0}{\epsilon \epsilon_0 E} \frac{D}{(\mu E)^2 \tau(E)} \right] dE}{\oint \rho \left[\frac{1}{\tau(E)} + \frac{j_0}{\epsilon \epsilon_0 E} \right] dE} \quad (6.8)$$

schreiben. Wir wollen nun annehmen, daß ρ gerade für die Feldstärke E_2 seinen betragsmäßig größten Wert annimmt. (Wie sich anhand numerischer Rechenbeispiele zeigen wird, ist dies näherungsweise der Fall.) Dann kann man v_D in guter Näherung als Verhältnis der Integranden von (6.8) an der Stelle E_2 schreiben und man erhält die völlig mit (5.7) übereinstimmende Formel

$$v_D = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{R2}}{\tau_2}} \left\{ \frac{\tau_{R2}}{\tau_{h2}} \mu E_2 + \frac{D}{\mu E_2 \tau_2} \right\} . \quad (6.9)$$

2) Symmetrische Domänen

Die Differentialgleichung (6.4) läßt sich unter der Voraussetzung, daß das mittlere Glied klein ist gegen die beiden anderen, sofort integrieren, und man erhält für die Raumladungsdichte den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \rho^2 = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu v_D} \int_{E_1}^E \frac{j_h(E) - j_0}{E \tau(E)} dE \quad (6.10)$$

Da ρ quadratisch vorkommt, sind die Kurven in der E_ρ -Ebene in diesem Fall symmetrisch zur E-Achse, oder mit anderen Worten, man bekommt Domänen mit zueinander symmetrischen Flanken. Die exponentiell abklingenden Ausläufer solcher Domänen waren schon im Rahmen der linearen Theorie in Kapitel V 3 untersucht worden. Als Symmetriebedingung war dabei die Ungleichung (5.9) aufgetreten, welche die gleiche physikalische Bedeutung hat wie die Forderung, daß das mittlere Glied der Differentialgleichung (6.4) klein sein soll gegen die beiden anderen Glieder.

Wir wollen nun die Formel (6.10) diskutieren. Sie enthält als Parameter den Gesamtstrom j_0 , der nach Bild 2 die Feldstärken E_1 , E_2 und E_3 festlegt. Zwischen den Feldstärken E_1 und E_2 ist der Integrand positiv, weil dort nach Bild 2 $j_n(E)$ größer ist als j_0 ; zwischen E_2 und E_3 ist der Integrand negativ. Das Integral (6.10) besitzt also an der Stelle E_2 ein Maximum. Daraus folgt sofort, daß die Raumladungsdichte dort dem Betrage nach ebenfalls ein Maximum haben muß. Damit in der E_ρ -Ebene eine geschlossene Lösung durch den singulären Punkt 1 möglich ist, muß nach Bild 19 der Gesamtstrom genügend groß sein. Das Integral (6.10) hat dann zwischen E_2 und E_3 eine Nullstelle, was man auch durch die Ungleichung

$$\int_{E_1(j_0)}^{E_3(j_0)} \frac{j_n(E) - j_0}{E \tau(E)} dE < 0$$

ausdrücken kann^{*)}. Diese Überlegungen führen zu einer Gleichung für den in Bild 19 gezeichneten kleinsten Strom j_∞ , der noch bei Domänen hoher Feldstärke möglich ist:

$$\int_{E_1(j_\infty)}^{E_3(j_\infty)} \frac{j_n(E) - j_\infty}{E \tau(E)} dE = 0$$

^{*)} Ähnliche Gedankengänge stammen von Volkov (32).

VII Verfahren zur praktischen Berechnung der Domänenformen

1) Aufbau des Programms:

a) Ausgangsgleichungen

Die bisherigen theoretischen Überlegungen zeigten, daß man eigentlich nur im Falle symmetrischer Domänen die Differentialgleichungen befriedigend lösen kann. Bei unsymmetrischen Domänen kann man zwar die Domänengeschwindigkeit dadurch berechnen, daß man den singulären Punkt 2 zum Wirbelpunkt macht, doch ist es bisher nicht möglich gewesen, die Domänenformen exakt anzugeben. Um trotz dieser Schwierigkeit ein Bild von den Lösungen zu bekommen, versucht man am besten, die Differentialgleichungen für konkret vorgegebene Parameter mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine zu lösen.

Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, eine dimensionslose Schreibweise einzuführen, indem man alle auftretenden Größen auf die in Bild 22 eingezeichneten Vergleichsgrößen n_v , E_v und die Zeit $t_v = \frac{\epsilon \epsilon_0}{e \mu n_v}$ bezieht:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{E}{E_v}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{n_v}, \quad \tilde{\hbar} = \frac{\hbar}{n_v}, \quad \tilde{N} = \frac{N}{n_v}, \\ \tilde{D} &= \frac{D t_v}{(\mu E t_v)^2}, \quad \tilde{G} = \frac{G t_v}{n_v}, \quad \tilde{j}_0 = \frac{j_0}{e \mu n_v}, \\ \tilde{z} &= \frac{z}{\mu E t_v}, \quad \tilde{v}_D = \frac{v_D}{\mu E_v}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{t_v}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Als physikalisches Modell für die Rechnungen wurde angenommen, daß die Elektronen mit einer erheblich größeren Zahl von Haftstellen rekombinieren können ($n \ll h \ll H$ in Gl. (1.7)). Die negative differentielle Leitfähig-

keit wurde dabei durch eine geeignete Feldabhängigkeit des Rekombinationskoeffizienten erreicht. Die Gleichungen lauteten in dimensionsloser Schreibweise:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{E}}{d\tilde{z}} &= \tilde{N} - \tilde{n} + \tilde{h} \quad , \\ \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{z}} &= \frac{1}{\tilde{D}} \left\{ \tilde{j}_0 - \tilde{n}\tilde{E} - \tilde{v}_D(\tilde{N} - \tilde{n} + \tilde{h}) \right\} \quad , \\ \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{z}} &= \frac{1}{\tilde{v}_D} \left\{ -\tilde{r}(\tilde{E})\tilde{n}\tilde{h} + \tilde{G} \right\} \quad .\end{aligned}\tag{7.2}$$

Der Rekombinationskoeffizient $\tilde{r}(\tilde{E})$ wurde dabei aus einer vorgegebenen $\tilde{n}_n(\tilde{E})$ -Kennlinie von folgender Gestalt (Bild 22)

$$\tilde{n}_n(\tilde{E}) = \tilde{n}_1 + (1 - \tilde{n}_1) \frac{1}{\exp[a(\tilde{E} - 1)] + 1}\tag{7.3}$$

berechnet^{*)}. Ihre Form ließ sich durch die beiden Parameter $\tilde{n}_1$ und a verändern. a gibt dabei an, wie steil die Kennlinie bei der Feldstärke $\tilde{E} = 1$ abfällt und hängt mit dem Tangens des Neigungswinkels wie folgt zusammen:

$$\varrho = \left. \frac{d\tilde{n}_n}{d\tilde{E}} \right|_1 = - (1 - \tilde{n}_1) \frac{a}{4} \quad .\tag{7.4}$$

*) Mit Hilfe der Formeln (1.10).

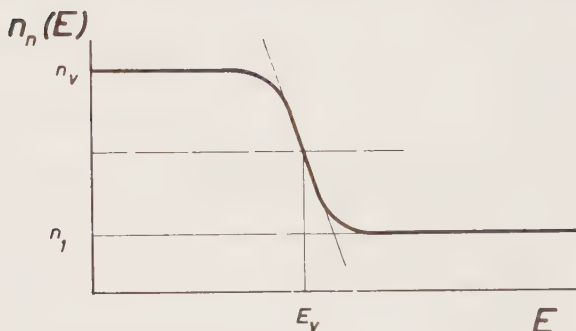


Bild 22: Zur Definition der Vergleichsfeldstärke E_v und der Vergleichsdichte n_v

Insgesamt mußten zu Beginn der Rechnung folgende Konstanten vorgegeben werden:

$$\tilde{D}, \tilde{j}_0, \tilde{g}, \tilde{N}, b, \tilde{n}_1 . \quad (7.5)$$

Dazu kamen noch zwei Geschwindigkeiten $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$, zwischen denen die richtige Domänengeschwindigkeit vermutet wurde.

b) Schrittweite und Anfangswerte

Das System (7.2) kann man dadurch lösen, daß man sich bestimmte Anfangswerte vorgibt (etwa $\tilde{z}^0 = 0, \tilde{E}^0, \tilde{n}^0$ und $\tilde{h}^0$) und dann die Funktionswerte $\tilde{E}, \tilde{n}$ und $\tilde{h}$ an der Stelle $\tilde{z}^0 + \Delta\tilde{z}$ ausrechnet. Die neuen Funktionswerte dienen wieder als Anfangswerte für einen weiteren Rechenschritt usw.. Zur praktischen Rechnung wurde ein

Runge-Kutta-Verfahren (56) für Differentialgleichungssysteme verwendet, bei dem der Fehler nach einem Rechenschritt proportional zu Δz^8 war. Die Genauigkeit der Rechnung hängt entscheidend von der Schrittweite ab. Einerseits möchte man diese möglichst groß wählen, um Rechenzeit zu sparen, doch andererseits muß sie desto kleiner sein, je genauer die Rechnung werden soll. Das verwendete Programm war so geschrieben, daß die Maschine automatisch die richtige Schrittweite vorgab, indem sie nach einer bestimmten Zahl von Schritten die Genauigkeit durch Rechnen mit halber Schrittweite nachprüfte und dann nötigenfalls die Schrittweite abänderte. Um Domänen von der in Bild 7 dargestellten Form zu erhalten, beginnt man am besten die Rechnung am vorderen Domänenausläufer. Im Enh-Raum befindet man sich dann mit den Anfangswerten in der Nähe des singulären Punktes 1. Die Verbindungslinie des singulären Punktes 1 mit dem Anfangspunkt (E^0, n^0, h^0) muß die gleiche Richtung haben wie derjenige Eigenvektor der Matrix A, der zum kleinsten positiven Eigenwert gehört (s. S. 57). Um also einen geeigneten Anfangspunkt im Enh-Raum vorgeben zu können, muß man erst die Koeffizienten der Matrix A am singulären Punkt 1 ausrechnen und dann den Eigenvektor zum kleinsten positiven Eigenwert suchen. Durch den Eigenvektor wird eine Gerade durch den singulären Punkt festgelegt, auf der man in nicht zu großer Entfernung von diesem den Anfangspunkt (E^0, n^0, h^0) wählt. (Der Abstand beider Punkte muß so klein sein, daß die linearen Differentialgleichungen (3.3) gelten.)

Da man die richtige Domänengeschwindigkeit nicht kennt, wird man zunächst mit einem geschätzten Wert für v_D die Rechnung beginnen. Nimmt E im Laufe der Rechnung Werte an, die größer als E_3 oder kleiner als E_1 sind, dann war v_D zu groß (Kurve a oder b in Bild 13). Bei zu kleinem v_D strebt $E(z) - E_2$ mit wachsendem z gegen

Null oder ändert ständig sein Vorzeichen (Kurve d in Bild 13). Dieses unterschiedliche Verhalten der Lösungen kann man zum automatischen Eingabeln des richtigen v_D -Wertes benutzen. Man geht dabei aus von einer zu großen und einer zu kleinen Domänengeschwindigkeit. Die Rechenmaschine prüft dann nach, ob die Lösungskurve für die daraus gemittelte Geschwindigkeit im schraffierten Bereich von Bild 13 bleibt oder nicht. Damit ist das Intervall halbiert, in dem die richtige Domänengeschwindigkeit liegt. Dieses Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis v_D genügend genau bekannt ist.

Bild 23 zeigt ein Flußdiagramm des Programms, wobei das mit RUKU bezeichnete Rechteck das in Bild 24 dargestellte Unterprogramm bedeutet.

2) Ergebnisse

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Rechnung zusammengestellt. Die letzte Spalte enthält die mit der Rechenmaschine ermittelten Domänengeschwindigkeiten, während in der Spalte links daneben die Domänengeschwindigkeiten angegeben sind, welche sich nach Formel (5.7) ergeben. Zum besseren Vergleich sei der Ausdruck (5.7) hier noch einmal in dimensionsloser Form angegeben:

$$\tilde{v}_D = \frac{\frac{\tilde{E}_2}{\tilde{\eta}_{n2}} + \frac{\tilde{\eta}_{n2}}{\tilde{E}_2} \frac{\tilde{D}}{\tilde{l}_2}}{\tilde{\eta}_{n2} + \frac{1}{\tilde{l}_2}} \quad (7.6)$$

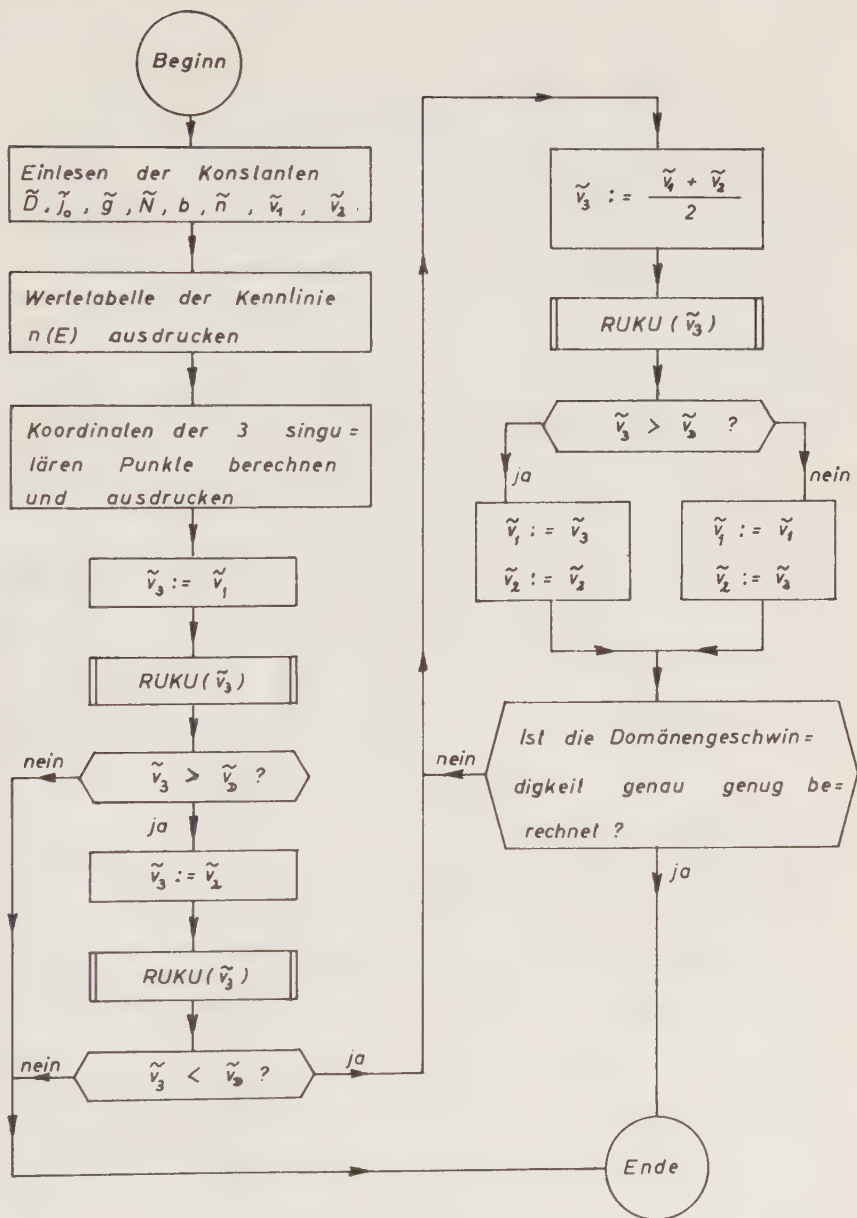


Bild 23

Flußdiagramm des Programms. (Der Programm-
teil RUKU ist auf Bild 24 angegeben.)

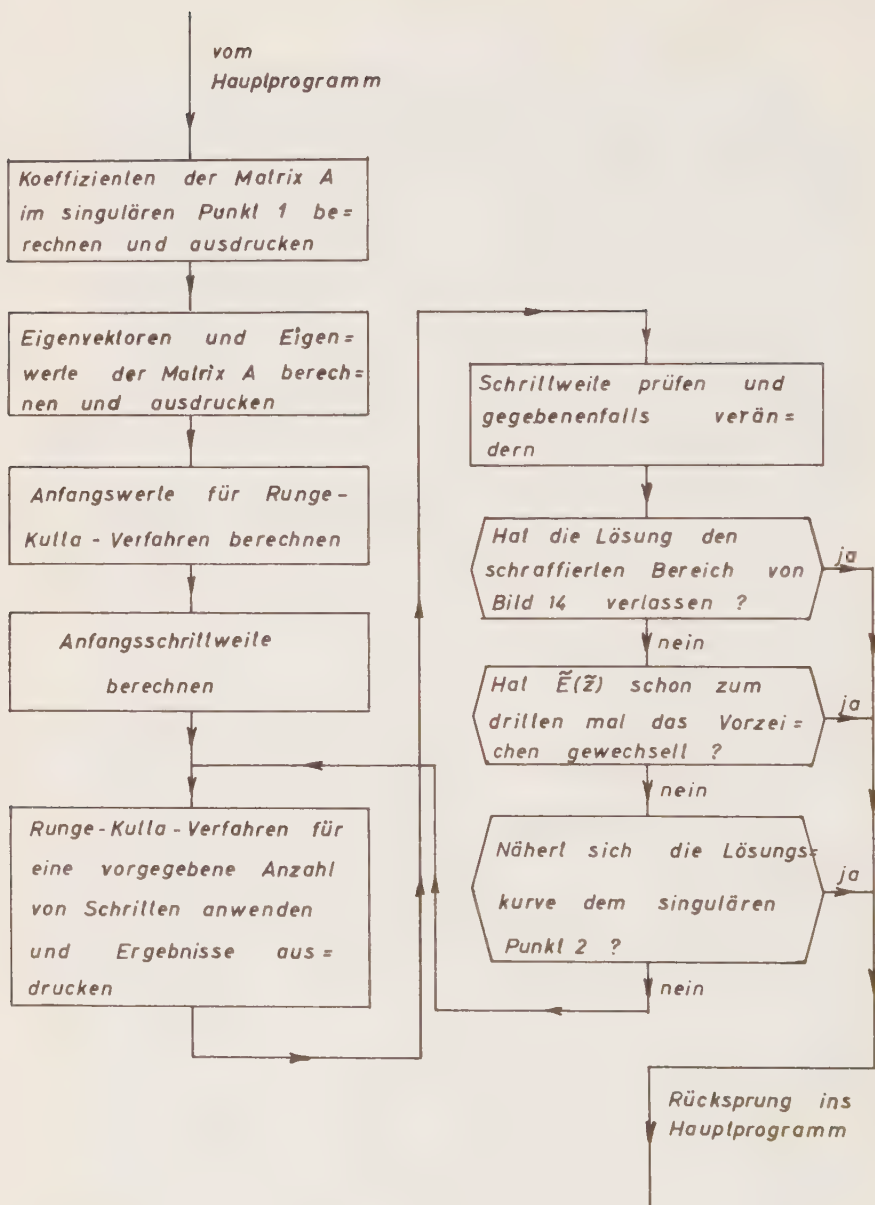


Bild 24 Unterprogramm RUKU.

Tabelle 1

Ziel = Ziel	vorgegebene Parameter							„Feldstärken“ und „Lebens- dauern“ im singulären Punkt 2			Nach For- mel (7.6) berechnetes	Mit dem Programm berechnetes	Bild Nr.
	$\tilde{n}_1$	b	$\tilde{D}$	γ_0	$\tilde{G}$	$\tilde{N}$	$\tilde{E}_2$	$\tilde{\gamma}_{h2}$	$\tilde{\gamma}_2$	$\tilde{v}_b$	$\tilde{v}_b$	$\tilde{v}_b$	
1	0,25	-2	0,1	0,5	0,1	-1	1,089	14,6	3,52	$1,16 \cdot 10^{-1}$	$1,06 \cdot 10^{-1}$		25
2	0,25	-2	0,05	0,5	0,1	-1	1,089	14,6	3,52	$1,08 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$		
3	0,25	-2	0,025	0,5	0,1	-1	1,089	14,6	3,52	$1,04 \cdot 10^{-1}$	0,092		
4	0,25	-2	0,1	0,5	0,01	-1	1,089	14,6	35,2	$1,76 \cdot 10^{-2}$	$1,50 \cdot 10^{-2}$		26
5	0,25	-2	0,01	0,5	0,1		1,089	∞	4,62	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$		27
6	0,25	-4	0,01	0,5	0,1		1,038	∞	4,82	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$		
7	0,25	-2	0,001	0,5	10		1,089	∞	0,0462	$4,16 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$		29
8	0,25	-2	0,001	0,5	0,1		1,089	∞	4,62	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-4}$		
9	0,25	-2	0,01	0,5	1		1,089	∞	0,462	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$		28
10	0,25	-10	0,01	0,5	1		1,014	∞	0,495	$3,93 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$		
11	0,25	-10	0,01	0,5	0,1		1,014	∞	4,95	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$		
12	0,25	-10	0,001	0,5	10		1,014	∞	0,0495	$4,76 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$		

Die Werte für die Domänengeschwindigkeiten in beiden Spalten der Tabelle weichen nur wenig voneinander ab, womit bewiesen ist, daß die Formel (7.6) recht gut gilt.

In den Rechenbeispielen 1 bis 3 wurde der Koeffizient $\tilde{D}$ verändert, was aber kaum Einfluß auf die Domänenform und auf $\tilde{v}_D$ hat. Das liegt daran, daß der erste Summand im Zähler von (7.6) größer ist als der zweite. Die Domänengeschwindigkeit wird aber erwartungsgemäß kleiner, wenn man im ersten Summanden $\tilde{\tau}_{h2}$ vergrößert (Beispiel 4). In den Bildern 25 und 26 sind die zu den Beispielen 1 bis 4 gehörenden Lösungskurven in der E_p -Ebene aufgetragen. Die dick ausgezogenen, nahezu geschlossenen Kurven sind unsymmetrisch zu $\tilde{E}$ -Achse und haben ihr Maximum bzw. Minimum bei $\tilde{E}_2$.

Bei den Rechenbeispielen 5 bis 12 spielt im Gegensatz zu den bisher besprochenen Fällen nur das Diffusionsglied von Gl. (7.6) eine Rolle. Das Feldglied ist durch den gegenüber (7.2) abgeänderten Rekombinationsansatz

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{v}_D} \left\{ -\frac{\tilde{n}}{\tilde{\tau}(\tilde{E})} + \tilde{G} \right\}$$

$$\tilde{\tau}(\tilde{E}) = \frac{\tilde{n}_n(\tilde{E})}{\tilde{G}}$$

zum Verschwinden gebracht worden ($\tilde{\tau}_{h2} = \infty$). Man sieht, daß eine Veränderung von $\tilde{D}$ jetzt genau den Einfluß hat, den man nach Formel (7.6) erwarten würde.

Die Abhängigkeit der Domänengeschwindigkeit von $\tilde{\tau}_2$ und $\tilde{n}_{n2}$ (d. h. von dem Verhältnis der Lebensdauern $\frac{\tau_2}{\tau_{R2}} = \tilde{n}_{o2} \tilde{\tau}_2$) wird ebenfalls durch die maschinelle Rechnung bestätigt (Beispiele 5 bis 12). Bei den Beispielen 6, 10, 11 und 12 hatte die

$\tilde{n}_n(\tilde{E})$ Kennlinie einen steileren Abfall als bei den vorherigen Rechnungen ($b = -10$ gegenüber $b = -2$). Der Einfluß dieser Änderung auf $\tilde{v}_D$ ist aber erwartungsgemäß nur gering. Auf den Bildern 27 bis 29 sind einige Charakteristiken in der E_ρ -Ebene gezeichnet. Die dick ausgezogenen, nahezu geschlossenen Kurven sind symmetrisch zur E-Achse und haben genau den Verlauf, den man nach der Formel (6.10) erwarten würde.

Da die Charakteristiken des Gleichungssystems (7.2) eigentlich Kurven im dreidimensionalen Enh-Raum sind, enthalten die Kurven der E_ρ -Ebene noch nicht alle Informationen über die Lösungen. Deshalb ist auf den Bildern noch die Abweichung der Elektronendichte von dem Wert aufgetragen, der bei homogener Feldverteilung im Rekombinationsgleichgewicht vorliegen würde. An den Stellen der Domänenflanken, wo die Feldstärke kleiner als E_2 ist, herrscht im Verhältnis zum Gleichgewichtswert Elektronenmangel, an den anderen Stellen Elektronenüberschuß. Die Kurvenäste für beide Domänenflanken liegen fast aufeinander. Man kann sich den Verlauf der Kurven leicht erklären, wenn man annimmt, daß der Feldstrom groß gegen den Diffusions- und den Verschiebungsstrom und damit nahezu gleich dem Gesamtstrom ist. Aus

$$e\mu nE = j_0$$

ergibt sich dann nämlich sofort n in Abhängigkeit von E . Nach dieser Überlegung dürften die beiden Kurvenäste gar nicht aufspalten. Daß dies dennoch geschieht, liegt an den kleinen Diffusions- und Verschiebungsströmen, die in den beiden Domänenflanken verschiedene Vorzeichen haben.

Da $n_n(E)$ die Elektronendichte im Gleichgewicht bei fehlender Raumladung ist, stellt die Differenz $e(n_n - n)$ denjenigen Teil der Raumladung dar, der von den Elektronen des Leitungsbandes getragen wird. Vergleicht man die dimensionslosen Maßstäbe der $\tilde{\rho}$ - und der $(\tilde{n} - \tilde{n}_n)$ -Diagramme, die zu gleichen Rechenbei-

spielen gehören, so sieht man daß bei kleinen Domänengeschwindigkeiten der überwiegende Teil der Raumladung sich nicht im Leitungsband befinden kann. Die Raumladung muß also fast ausschließlich in den Haftstellen der verbotenen Zone gebunden sein.

Abschließend kann man sagen, daß für Domänengeschwindigkeiten, die klein sind gegen die Elektronendriftgeschwindigkeit, die Formel (5.7) eine recht brauchbare Näherung darstellt, zumindest, solange man das einfache Modell des feldabhängigen Elektroneneinfangs an Zentren verwendet. Für das Modell der inneren Felemission von Minoritätsträgern werden die Ergebnisse der Rechnungen nur dann verwendbar sein, wenn die auf S. 15 vorgenommenen Vernachlässigungen auch wirklich erlaubt sind. Eine Fehlerquelle könnte sich zum Beispiel dadurch ergeben, daß die Löcherdichte im Valenzband vergleichbar mit der Elektronendichte im Leitungsband wird. Dann müßte man nämlich in der Formel (1.19) auch noch den Löcherstrom berücksichtigen.

Bild 25

Charakteristiken der

E φ -Ebene für die

Zahlenwerte des

Rechenbeispiels

Nr. 1 :

$$\tilde{n}_1 = 0,25; \quad b = -2;$$

$$\tilde{f}_0 = 0,5; \quad \tilde{D} = 0,1;$$

$$\tilde{N} = -1; \quad \tilde{G} = 0,1.$$

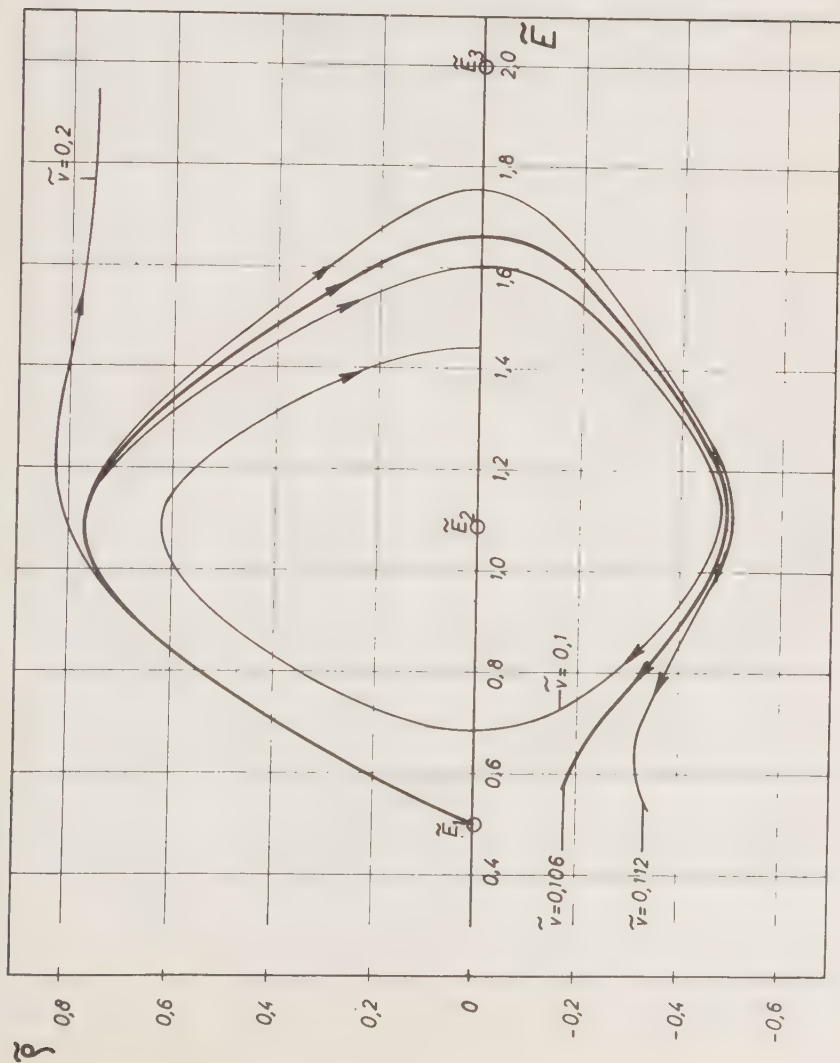


Bild 26

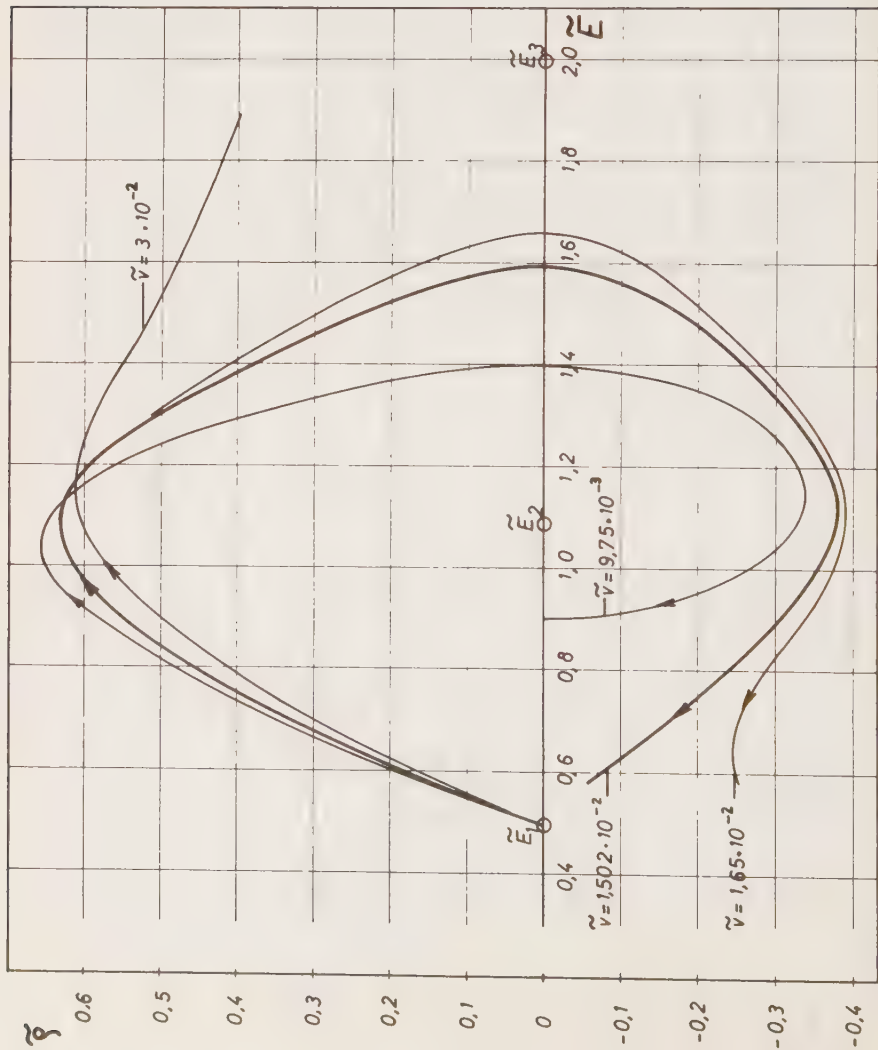
Charakteristiken der
 E_g -Ebene für die Zahlen=
 werte des Rechenbeispiels

Nr. 4 :

$$\tilde{n}_1 = 0,25; \quad b = -2;$$

$$\tilde{j}_0 = 0,5; \quad \tilde{D} = 0,1;$$

$$\tilde{N} = -1; \quad \tilde{G} = 0,01.$$



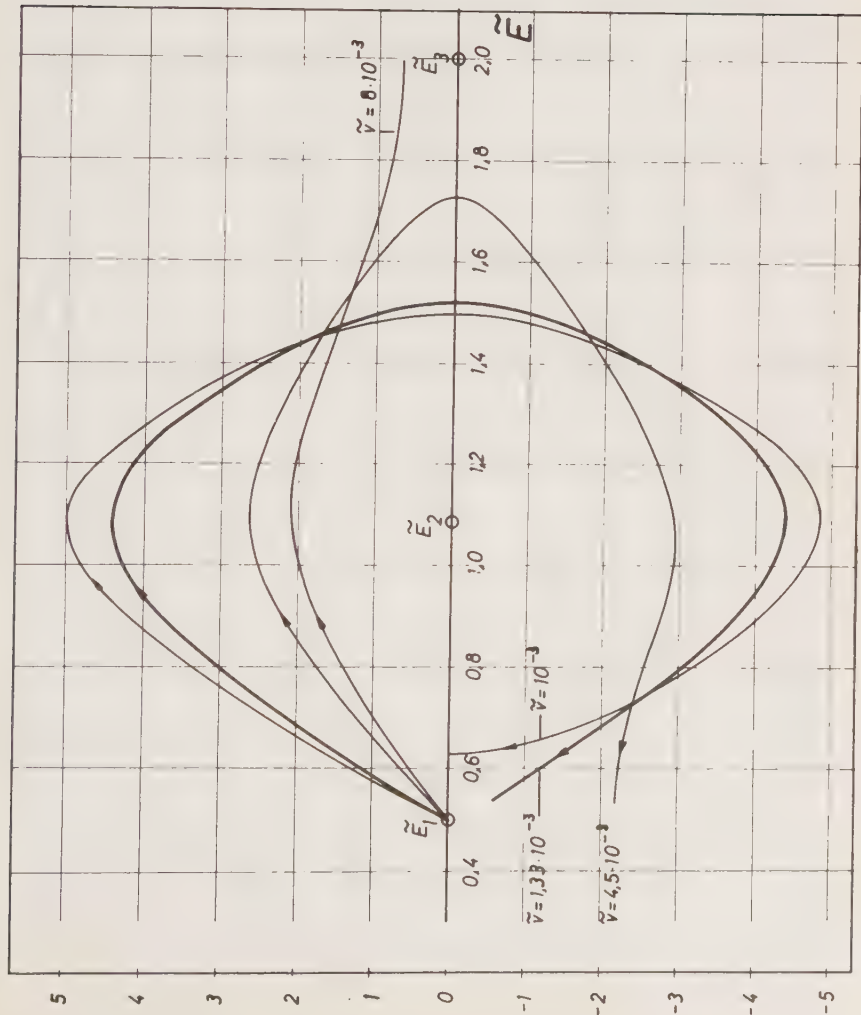


Bild 27

Charakteristiken der

E_F -Ebene für die

Zahlenwerte des Rechen =

beispiels Nr. 5 :

$\tilde{\eta}_1 = 0,25$; $b = -2$;

$\tilde{f}_0 = 0,5$; $\tilde{D} = 10^{-2}$;

$\tilde{G} = 0,1$.

Bild 28

Bild 29

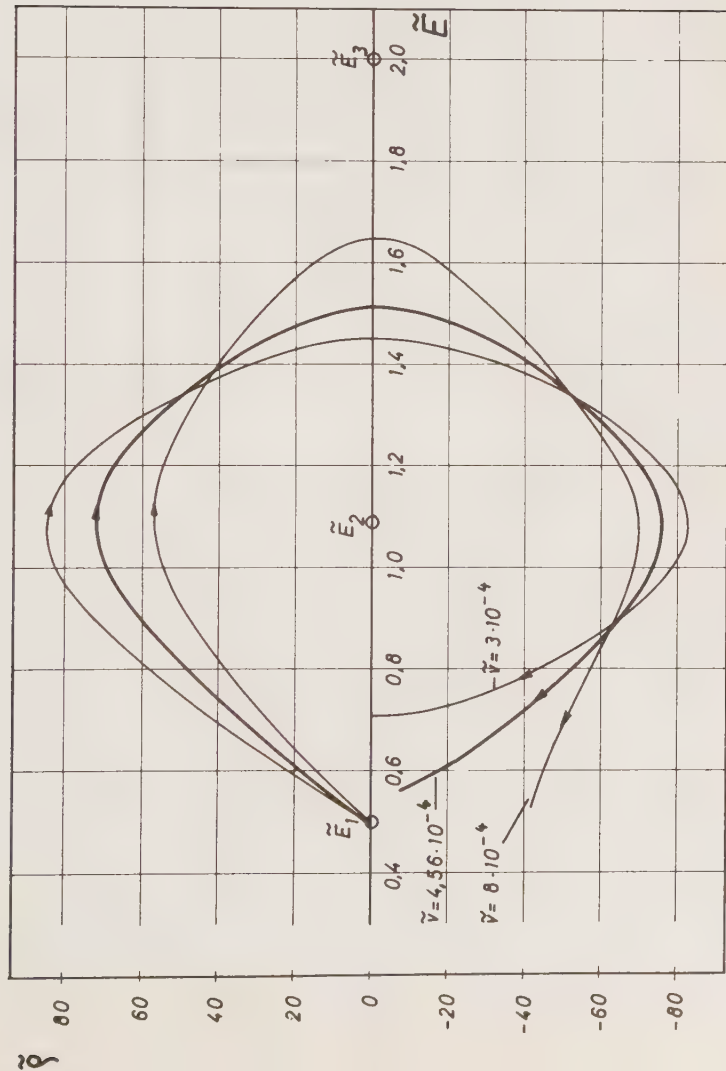
Charakteristiken der
E_φ-Ebene für die
Zahlenwerte des Rechen=

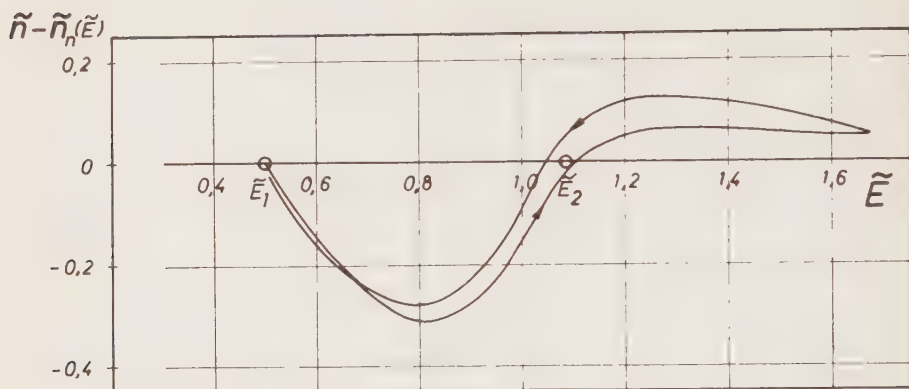
beispiels Nr. 7 :

$$\tilde{\eta}_1 = 0,25 ; \quad b = -2 ;$$

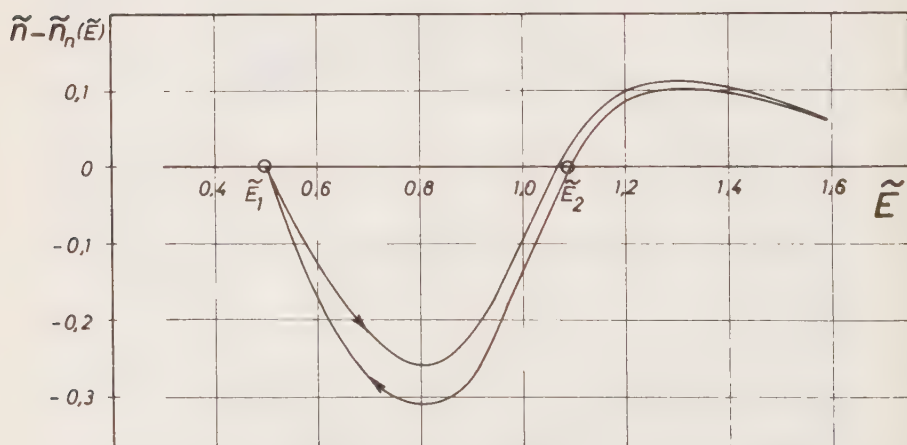
$$\tilde{I}_0 = 0,5 ; \quad \tilde{D} = 10^{-3} ;$$

$$\tilde{G} = 10 .$$





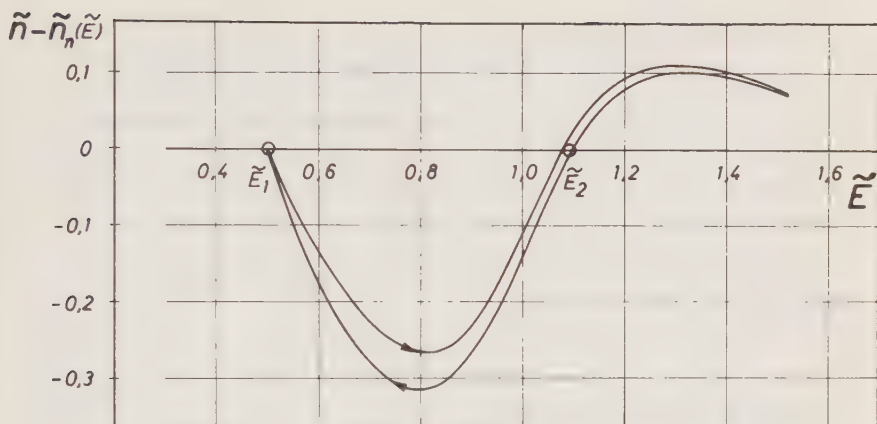
Rechenbeispiel Nr. 1 : $\tilde{n}_i = 0,25$; $b = -2$; $\tilde{j}_o = 0,5$; $\tilde{D} = 0,1$; $\tilde{N} = -1$;
 $\tilde{G} = 0,1$; $\tilde{V} = 0,106$.



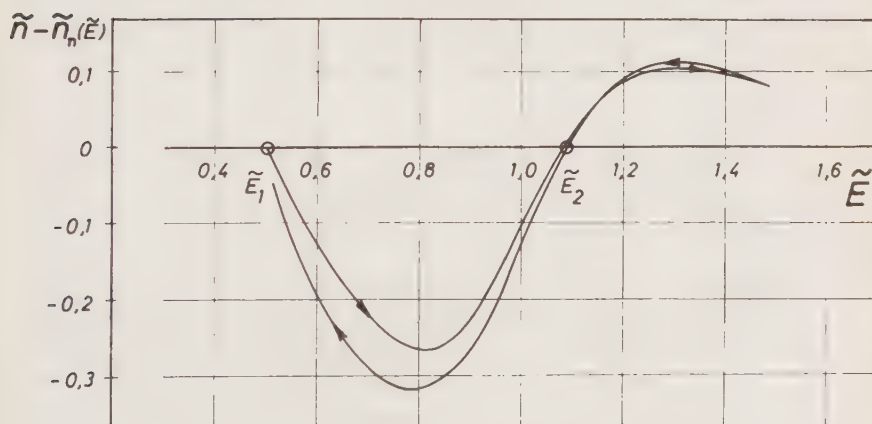
Rechenbeispiel Nr. 4 : $\tilde{n}_i = 0,25$; $b = -2$; $\tilde{j}_o = 0,5$; $\tilde{D} = 0,1$; $\tilde{N} = -1$;
 $\tilde{G} = 0,01$; $\tilde{V} = 0,0150$.

Bild 30

Abweichung der Elektronendichte vom Gleichgewichts-
 wert $n_n(E)$.



Rechenbeispiel Nr. 5 : $\tilde{n}_1 = 0,25$; $b = -2$; $\tilde{j}_0 = 0,5$; $\tilde{D} = 10^{-2}$;
 $\tilde{G} = 0,1$; $\tilde{v} = 1,33 \cdot 10^{-3}$.



Rechenbeispiel Nr. 9 : $\tilde{n}_1 = 0,25$; $b = -2$; $\tilde{j}_0 = 0,5$; $\tilde{D} = 10^{-2}$;
 $\tilde{G} = 1$; $\tilde{v} = 3,84 \cdot 10^{-3}$.

Bild 31

Abweichung der Elektronendichte vom Gleichgewichtswert $n_n(E)$:

VIII Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden wandernde Domänen hoher Feldstärke untersucht. Dabei betrachteten wir lediglich solche Domänen, die durch eine negative differentielle Volumenleitfähigkeit entstehen. Als physikalische Ursache für diese negative differentielle Leitfähigkeit war angenommen worden, daß mit wachsendem elektrischen Feld die beweglichen Ladungsträger von Haftstellen eingefangen werden.

Zur Bestimmung der Domänengeschwindigkeit wurden drei verschiedene Wege eingeschlagen:

- 1.) Bei der Untersuchung von Raumladungswellen mit räumlich und zeitlich konstanter, aber genügend kleiner Amplitude wurden die Differentialgleichungen linearisiert und eine Dispersionsgleichung abgeleitet, aus der die Phasengeschwindigkeit bestimmt wurde (Kapitel II). Diese Phasengeschwindigkeit ist praktisch gleich der Domänengeschwindigkeit, wie die Methoden 2) und 3) zeigen.
- 2.) Die Domänengeschwindigkeit wurde dadurch bestimmt, daß der singuläre Punkt 2 zum Wirbelpunkt gemacht wurde (Kapitel V).
- 3.) Mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine konnten die nichtlinearen Differentialgleichungen ohne Näherungen gelöst werden. Die Domänengeschwindigkeit erhielt man aus der Forderung, daß die vom singulären Punkt 1 ausgehende Charakteristik eine geschlossene Kurve ist (Kapitel VII).

Dabei ergab sich, daß die Methoden 1) und 2) in ihrem Ergebnis völlig übereinstimmen und dadurch als mathematisch gleich-

wertig anzusehen sind. Die dritte Methode liefert ebenfalls Ergebnisse, die sich nur wenig von denen der beiden anderen Methoden unterscheiden. Daraus folgt, daß die Geschwindigkeit der Domänen recht gut durch die Gleichung

$$\tilde{v}_D = \frac{\frac{1}{\tau_R} \mu E + \frac{D}{\mu E \tau \tau_R}}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R}} \quad (8.1)$$

gegeben wird, zumindest unter den in Kapitel II 3 angegebenen Voraussetzungen. Die Geschwindigkeit setzt sich aus einem Driftterm ($v_\mu E$) und einem Diffusionsterm (v_D) zusammen. Wenn die in Kapitel I definierte Lebensdauer τ_h sehr unterschiedliche Werte annehmen kann, wird verständlich, warum in der Literatur in der Größenordnung so verschiedene Domänengeschwindigkeiten angegeben wurden. Wenn τ_h unendlich groß ist, kann nur der Diffusionsterm in (8.1) eine Rolle spielen. Es ergibt sich als kleinstmögliche Domänengeschwindigkeit dann

$$v_{D_{min}} = \frac{D}{\mu E (\tau + \tau_R)} \quad (8.2)$$

Die Bedingung $\tau_h = \infty$ hat nach Gleichung (1.4) die folgende physikalische Bedeutung: Der Ladungsträgeraustausch zwischen Leitungsband und Haftstellen darf nicht von den Konzentrationsänderungen der Ladungsträger beeinflusst werden, die an Haftstellen gebunden sind. Man kann sich in diesem Fall das Wandern der Domänen anhand des Bildes 32 klarmachen:

Die Bilder 32a und b zeigen den Feld- und Raumladungsdichteverlauf. Die Raumladung sitzt übrigens wegen der kleinen Domänengeschwindigkeit praktisch vollständig in den Haftstellen. In Bild 32c ist die Elektronendichte aufgetragen. Sie

ist dort groß, wo die Feldstärke klein ist und umgekehrt, so daß der Strom innerhalb und außerhalb der Domäne den gleichen Wert annimmt. Außerdem ist die Elektronenkonzentration n_n eingezeichnet, die bei der jeweiligen Feldstärke an der Stelle x im Gleichgewicht und bei fehlender Raumladung vorliegen würde. In den schraffierten Bereichen A des Bildes liegt diese Kurve unterhalb, in den Bereichen B oberhalb der n -Kurve *). Daher herrscht bei A im Verhältnis zum Gleichgewicht Elektronenmangel, bei B Elektronenüberschuß. Wir wollen nun fordern, daß die Konzentration der von Elektronen unbesetzten Haftstellen sich nicht ändern kann, wenn an jeder Stelle die Elektronen im Gleichgewicht sind ($n = n_n$), und zwar auch dann nicht, wenn die unbesetzten Haftstellen nicht im Gleichgewicht sind. Diese Forderung bedeutet einfach, daß die Lebensdauer der unbesetzten Haftstellen im Verhältnis zur Lebensdauer der Elektronen außerordentlich groß ist ($\tau_h = \infty$), denn nach (1.4) folgt dann die Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{n - n_n}{\tau_n} , \quad (8.3)$$

welche lediglich das oben Geforderte mathematisch ausdrückt.

Betrachten wir nun die vordere Domänenflanke (linke Seiten der Bilder 32a bis d): Weil im Bereich A n kleiner ist als n_n , entstehen dort nach Formel (8.3) unbesetzte Haftstellen, und zwar dadurch, daß aus den Haftstellen mehr Elektronen ins Leitungsband übergehen als umgekehrt von dort zurückkehren (s. Bild 32d). Die im Gebiet A ins Leitungsband angehobenen Elektronen diffundieren aber wegen des Konzentrationsgefälles in Richtung des Bereichs B **). Dadurch entsteht

*) Das geht aus sämtlichen gerechneten Beispielen hervor (Siehe Bilder 30 und 31).

**) Dieser Diffusionsvorgang ist einer allgemeinen Driftbewegung der Elektronen überlagert, die vom elektrischen Feld herrührt.

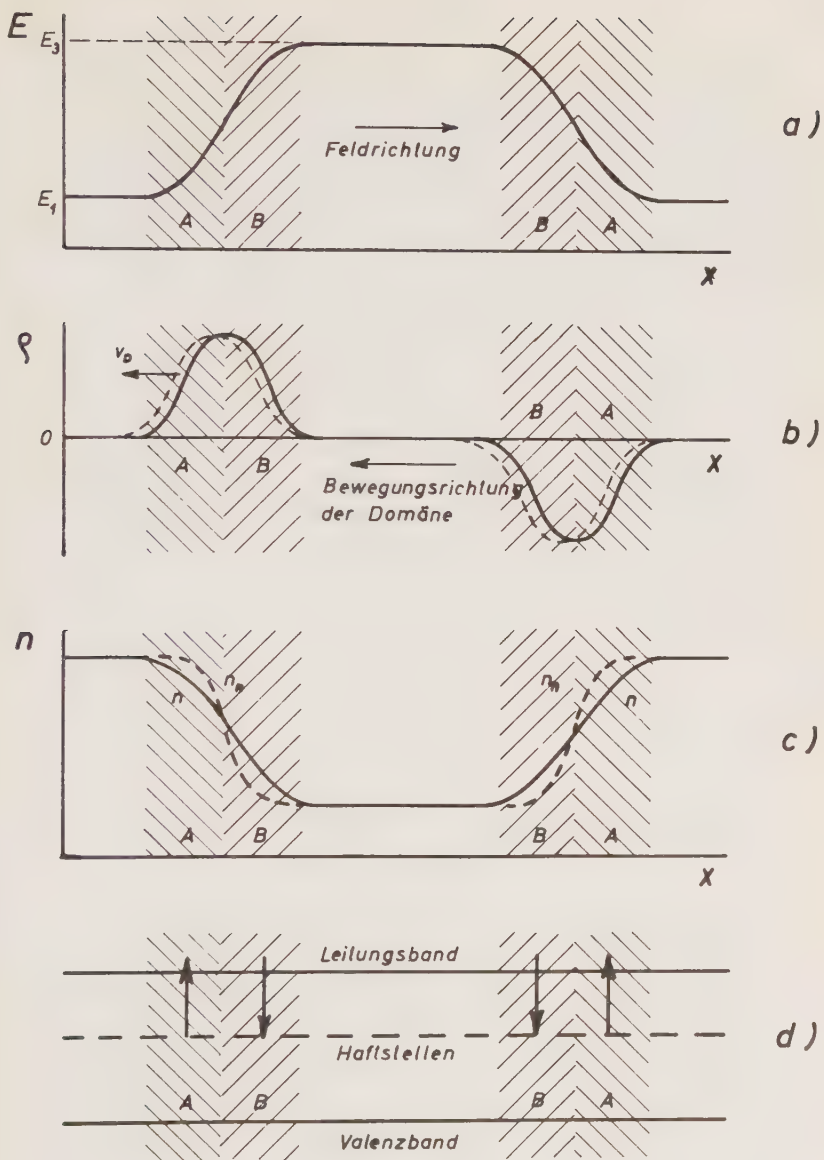


Bild 32 Zur Erläuterung der Domänenbewegung. Die Bilder a bis d sind im Text näher erklärt.

im Bereich A eine zusätzliche positive Raumladung, d.h. die linke Flanke der Raumladungsdichte-Kurve in Bild 32b verschiebt sich nach links (gestrichelte Kurve). Im Gebiet B spielt sich nun genau der umgekehrte Vorgang ab. Dort rekombinieren die herandiffundierten Elektronen mit unbesetzten Haftstellen und neutralisieren dadurch einen Teil der positiven, in den Haftstellen sitzenden Raumladung. Die Raumladungsdichte-Kurve in Bild 32c verschiebt sich dadurch auch im Bereich B nach links, so daß also die gesamte vordere Domänenflanke in diese Richtung wandert. Dies läßt sich entsprechend auch für die hintere Domänenflanke zeigen. Für den Transport der Raumladungen sind nach dem Gesagten die Diffusionsströme entscheidend. Ihnen ist ein im Verhältnis großer Feldstrom überlagert, der jedoch auf die Bewegung der Domäne keinen Einfluß hat, solange τ_h unendlich groß ist.

Wir wollen uns nun wieder der Diskussion der Gl. (8.1) zuwenden und der Reihe nach die Fälle betrachten, die sich ergeben, wenn man τ_h von sehr kleinen zu sehr großen Werten anwachsen läßt:

$$a) \quad \tau_h < \frac{\tau \tau_R}{\tau + \tau_R}$$

Die Formel (8.1) kann hier nicht gelten, weil sie größere Werte liefern würde als die Elektronendriftgeschwindigkeit. Dieser Fall ist in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt worden. Vermutlich ergeben sich aber analog zum Gunn Effekt stark unsymmetrische Domänen, die sich mit Elektronendriftgeschwindigkeit bewegen.

$$b) \quad \frac{\tau \tau_R}{\tau + \tau_R} \ll \tau_h \leq \tau + \tau_R$$

Jetzt befindet man sich im Gültigkeitsbereich von Formel (8.1). Da die Forderung (5.15) nicht erfüllt ist, kann man keine symmetrischen Domänen erwarten. Die Domänengeschwindigkeit nimmt umgekehrt proportional zu τ_h ab:

$$v_D \approx \frac{1}{\tau_h \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_R} \right)} \mu E$$

$$c) \quad \tau + \tau_R \ll \tau_h \leq \frac{(\mu E)^2 \tau \tau_R}{D}$$

Da die Abschätzungen (5.15) jetzt erfüllt sind, erhält man symmetrische Domänen, deren Flanken nach (5.13) etwa die Breite

$$\ell = \mu E \frac{\tau \tau_R}{\tau + \tau_R} \sqrt{\frac{\tau + \tau_R}{\tau_h}}$$

haben. Die Domänengeschwindigkeit und die Breite der Raumladungszonen nehmen mit wachsendem τ_h so lange ab, bis τ_h in den Bereich d) kommt.

$$d) \quad \frac{(\mu E)^2 \tau \tau_R}{D} < \tau_h$$

Jetzt verhindern Diffusionsvorgänge, daß die Raumladungszonen noch schmaler werden. Auch die Domänengeschwindigkeit wird mit wachsendem τ_h nicht mehr kleiner. Die Breite der Flanken ergibt sich nach (5.11) etwa zu

$$\ell = \sqrt{D \frac{\tau \tau_R}{\tau + \tau_R}}$$

Das ist für $\tau > \tau_R$ gerade die Debye-Länge, für $\tau < \tau_R$ die Diffusionslänge. Für die Domänengeschwindigkeit erhält man den Wert

$$v_D = \frac{D}{\mu E (\tau + \tau_R)} \quad ,$$

welcher so klein ist, daß die gemessenen niederfrequenten Strominstabilitäten ((3), (6) bis (11), s.a. S 55) damit verständlich werden. Für $\tau < \tau_R$ geht diese Formel in

$$v_D = \frac{D}{\mu E \tau_R}$$

über. Ein Ergebnis dieser Struktur erhielt Wilhelm (33) unter der Annahme, daß die Domänenflanken unendlich schmal sind. Seine Überlegungen sind wahrscheinlich deshalb richtig, weil für $\tau < \tau_R$ die Domänenflanken schmaler sind als die Debyelänge.

Es sei erwähnt, daß Ridley (26) aus linearen Differentialgleichungen eine Phasengeschwindigkeit für Raumladungswellen erhielt, die mit der Formel (8.1) übereinstimmt. Bonch-Bruевич ((29), (30)) leitete ebenfalls eine sehr ähnliche Formel für die Domänengeschwindigkeit ab. Dabei machte er ohne theoretische Begründung die vom Experiment her naheliegende Voraussetzung, daß die Domänen genügend langgestreckt und nahezu symmetrisch sind. Er erhielt durch dieses Vorgehen keine Ergebnisse über die Breite der Domänenflanken.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß ein Rechenprogramm aufgestellt und praktisch angewendet wurde, mit dem man das System von nichtlinearen Differentialgleichungen ohne Vernachlässigung numerisch lösen kann. Damit ist es möglich, auch kompliziertere Modelle durchzurechnen, die sich theoretisch nicht mehr behandeln lassen.

An erster Stelle gilt mein herzlicher Dank Herrn Professor Dr. O. Madelung, der diese Arbeit ermöglichte und durch stets gleichbleibendes Interesse förderte. Ferner danke ich Herrn Dr. G. Döhler für viele Anregungen und klärende Diskussionen. Den Herren Dr. U. Rößler und Dr. R. Sandrock bin ich für die Übersetzung russischer Arbeiten dankbar.

Literatur

- (1) B.K.Ridley, Proc.Phys.Soc. 82, 954 (1963)
- (2) H.Kiess u. F.Stöckmann, phys.stat.sol. 4, 117 (1964)
- (3) K.W.Böer, H.J.Hänsch und K.Kümmel, Z.Phys. 155, 170 (1959)
- (4) K.W.Böer, phys.stat.sol. 3, 1704 (1963)
- (5) K.W.Böer, Phys.Rev. 139, A1949 (1965)
- (6) B.K.Ridley u. R.G.Pratt, J.Phys.Chem.Solids 26, 21 (1965)
- (7) I.A.Kurova u. S.G.Kalashnikov, Sov.Phys. - Solid State 5, Nr. 11 (1964)
- (8) N.G.Zhdanova, M.S.Kagan u. S.G.Kalashnikov, Sov.Phys. - Solid State 8, 632 (1966)
- (9) C.Fishler-Hazoni u. F.Williams, Phys.Rev. 139, A583 (1965)
- (10) M.Polke, K.Hasler, phys.stat.sol. 9, 851 (1965)
- (11) K.Hasler, Diplomarbeit, Karlsruhe 1964
- (12) J.B.Gunn, Int.Conf.on Semicond., Plasma-Effects in Solids, Paris (1964), p. 199
- (13) A.G.Foyt, A.L.McWhorter, Trans.IEEE, Electron Devices 13, 79 (1966)
- (14) J.W.Allen, M.Shyam, Y.S.Chen u. G.L.Pearson, Appl.Phys. Letters 7, 78 (1965)
- (15) J.B.Gunn, IBM J.Res.Develop. 8, 141 (1964)
- (16) K.W.Böer, Monatsber.Deut.Akad.Wiss. Berlin 1, 325 (1959)
- (17) V.L.Bonch-Bruevich, Sov.Phys. - Solid State 6, 1615 (1965)
- (18) R.G.Pratt u.B.K.Ridley, J.Phys.Chem. Solids 26, 11 (1965)
- (19) V.L.Bonch-Bruevich u. S.G.Kalashnikov, Int.Conf.on Semicond., Plasma-Effects in Solids, Paris (1964)
- (20) K.W.Böer, Z.Phys. 155, 184 (1959)
- (21) H.Krömer, Phys.Rev. 109, 1856 (1958)
- (22) A.L.Zakharov, Sov.Phys. JETP 11, 478 (1960)

- (23) P.N.Butcher, W.Fawcett, Proc.Phys.Sol. 86, 1205 (1965)
- (24) B.K.Ridley, T.B.Watkins, Proc.Phys.Soc. 78, 293 (1961)
- (25) C.Hilsum, Proc. IRE 50, 185 (1962)
- (26) B.K.Ridley, Proc.Phys.Soc. 86, 637 (1965)
- (27) G.Döhler, Innere Feldemission von Minoritätsträgern in Photoleitern, Dissertation, Marburg (1966)
- (28) V.L.Bonch-Bruevich, Phys.Letters 20, 249 (1966)
- (29) V.L.Bonch-Bruevich, Fiz.Tverd.Tela 8, 1754 (1966)
- (30) S.G.Kalashnikov u. V.L.Bonch-Bruevich, phys.stat.sol. 16, 197 (1966)
- (31) A.F.Volkov, Phys.Letters 20, 598 (1966)
- (32) A.F.Volkov, Fiz.Tverd.Tela 8, 3187 (1966)
- (33) W.E.Wilhelm, phys.stat.sol. 16, K59 (1966)
- (34) K.W.Böer, G.A.Dussel, Phys.Rev. 154, 292 (1967)
- (35) H.Krömer, Proc. IEEE 52, 1736 (1964)
- (36) P.N.Butcher, Phys.Letters 19, 546 (1965)
- (37) H.Krömer, IEEE Transactions on Electron Devices ED-13, 27 (1966)
- (38) B.W.Knight u.G.A.Peterson, Phys.Rev. 147, 617 (1966)
- (39) B.W.Knight u. G.A. Peterson, Phys.Rev.Letters 17, 257 (1966)
- (40) J.W.Allen, W.Shockley u. G.L.Pearson, J.Appl.Phys. 37, 3191 (1966)
- (41) P.N.Butcher, W.Fawcett u. C.Hilsum, Brit.J.Appl.Phys. 17, 841 (1966)
- (42) D.E.Mc.Cumber u. A.G.Chynoweth, IEEE Transactions on Electron Devices ED-13, 4 (1966)
- (43) Y.Suematsu u. Y.Nishimura, Proc. IEEE 54, 1076 (1966)
- (44) J.S.Moore et al., J.Appl.Phys. 37, 2009 (1966)
- (45) K.W.Böer u. W.E.Wilhelm, phys.stat.sol. 3, 1718 (1963)

- (46) E.Kamke, Differentialgleichungen, Lösungen u. Lösungsmethoden Bd. I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G., Leipzig (1961)
- (47) M.Polke, phys.stat.sol. 5, 279 (1964)
- (48) V.L.Bonch-Bruevich u. Sh.M.Kogan, Soviet Physics - Solid State 7, 15 (1965)
- (49) Y.Suematsu, Y.Nishimura, Proc. IEEE 54, 322 (1966)
- (50) L.S.Pontryagin, Ordinary Differential Equations, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1962
- (51) R.A.Struble, Nonlinear Differential Equations, Mc.Graw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1962
- (52) H.Liebmann, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Verlag von Veit u. Comp., Leipzig 1901
- (53) K.Rottmann, Mathematische Formelsammlung, BI-Hochschultaschenbücher Bd. 13, 2. Aufl. Bibliographisches Inst. Mannheim (1960)
- (54) J.A.Copeland, J.Appl.Phys. 37, 3602 (1966)
- (55) H.Kiess, phys.stat.sol. 4, 107 (1964)
- (56) A.Huta, Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Tem. 1, Fasc. IV-VI (1956)

Lebenslauf

Am 19. Mai 1940 wurde ich als erstes Kind des Diplomingenieurs Karl Kröll und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Lauer, in Bad Hersfeld geboren. Dort besuchte ich vom Herbst 1946 bis Ostern 1951 die Volksschule und anschließend das Gymnasium. Am 23. Februar 1960 legte ich die Reifeprüfung ab. Dann studierte ich in Marburg Physik und bestand am 2. November 1962 die Vor-diplom-Prüfung. Während der Jahre 1964/65 fertigte ich am Institut für theoretische Festkörperphysik unter Anleitung von Herrn Professor Dr. O. Madelung eine Diplomarbeit an. Am 11. November 1965 legte ich die Diplomprüfung ab. Die folgenden Jahre waren der Arbeit an der vorliegenden Dissertation gewidmet.

